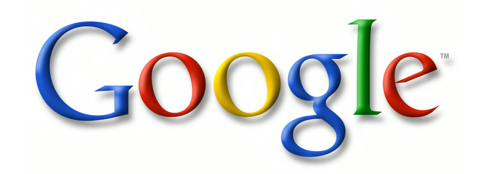
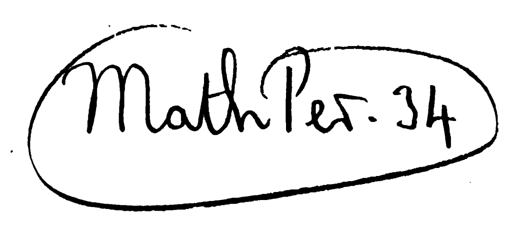
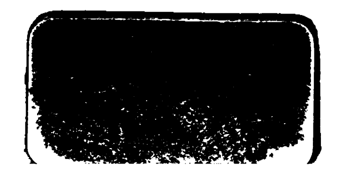





Math Per. 34



NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

TROISIÈME SÉRIE.

1884.




ΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΟΜΕΤΡΕΙ

NOUVELLES ANNALES
DE
MATHÉMATIQUES,

JOURNAL DES CANDIDATS
AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE,

RÉDIGÉ

PAR MM. GERONO,
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES,

ET

CH. BRISSE,
RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE CONDORCET.

TROISIÈME SÉRIE.

TOME TROISIÈME.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR MM. GERONO ET TERQUEM,
ET CONTINUÉE PAR MM. GERONO, PROUHET ET BOURGET.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, n° 55.

1884

NOUVELLES ANNALES
DE
MATHÉMATIQUES.

CONSTRUCTION DES POINTS DOUBLES EN PROJECTION DANS L'INTERSECTION DE DEUX SURFACES DU SECOND DEGRÉ;

PAR M. L. LEFÈVRE,

Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Tours.

Supposons qu'on demande les points doubles en projection horizontale. On coupe les surfaces par le plan vertical qui a pour trace la ligne L des points doubles, on obtient deux coniques Σ, Σ' (1) qui se coupent en quatre points M, N, O, P situés sur deux cordes verticales MN, OP dont les pieds sont les points doubles cherchés e, f.

Nous allons indiquer une méthode qui suppose seulement qu'on sache construire les points où les projections des sections des deux surfaces par deux plans Q, Q', choisis comme on voudra, coupent la ligne I.

Le plan Q détermine dans le plan de la figure une droite qui coupe Σ en deux points A, A_1, Σ' en B, B_1 et les cordes MN, OP en C, C_1.

D'après le théorème de Desargues, ces trois couples forment une involution (2), et si on les projette en a, a_1, b, b_1, e, f sur L, on a encore une involution qui est dé-

(1) Le lecteur est prié de faire la figure obtenue dans ce plan.

(2) Voir *Traité de Géométrie* de MM. Rouché et de Comberousse, 3e édition, § 1130.

terminée, puisque, par hypothèse, on en connait deux couples a, a_1, b, b_1; supposons construits ses points doubles d, d_1, les points inconnus e, f divisent harmoniquement dd_1.

Le plan Q' fournit une seconde involution de points doubles d', d'_1 qui divisent ef harmoniquement : donc e et f sont déterminés.

Remarque. — On devra s'arranger de façon que les couples d, d_1, d', d'_1 soient réels; pour cela, il suffit que les segments aa_1, bb_1 n'empiètent pas l'un sur l'autre.

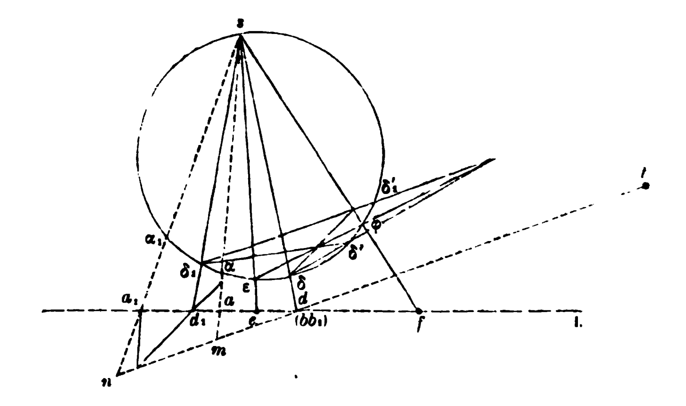
Il peut se faire que les points e, f ainsi construits soient des points isolés de la courbe; cela tient à ce que deux coniques Σ, Σ' ont toujours un couple réel de sécantes : il faudra chercher les projections verticales, ce qui est nécessaire si l'on veut avoir les tangentes.

Tracé graphique.

Il s'agit de déterminer trois fois les deux points qui divisent harmoniquement deux segments : pour effectuer ces constructions, nous projetons les différents points de L sur la circonférence d'un cercle dans le plan de la figure en prenant pour origine un point quelconque de ce cercle (*loc cit.*, § 1119).

Considérons par exemple deux cônes : nous prendrons deux des plans auxiliaires passant par les sommets S et T et ayant déjà servi à obtenir des points m, n de l'intersection; pour simplifier les constructions, prenons les deux plans limites; alors les deux points b, b_1 par exemple sont confondus : ils forment donc l'un des points doubles d; l'autre point double d_1 s'obtiendra en prenant le conjugué harmonique de d par rapport à aa_1. Cette construction peut se faire sans le secours du cercle. On déterminera de même un second couple $d'd'_1$ et l'on

achèvera la construction, ainsi que l'indique la figure, en prenant pour origine la projection du sommet S de l'un des cônes.



Lorsqu'on connaît un des deux points doubles, ce qui arrive lorsqu'il y a un point de rebroussement, il suffit, pour avoir l'autre, de déterminer un seul couple dd_1 et de prendre le conjugué harmonique du point connu par rapport à ce couple.

NOTE SUR UN ARTICLE DE M. BRISSE;

PAR M. LE D[r] S. GUNDELFINGER.

Votre travail, que je viens de recevoir dans les *Nouvelles Annales* de mai 1882 (p. 193-216), m'a intéressé au plus haut point, parce que vous y traitez un sujet auquel je me suis attaché moi-même depuis un certain nômbre d'années, et que j'ai traité en détail dans mes cours. Jusqu'ici, j'ai malheureusement été empêché de publier les résultats de mes recherches, autant par des

travaux d'un autre genre, que par le désir de traiter *toute* la théorie des surfaces du second ordre dans un Ouvrage spécial.

En raison de l'intérêt que vous portez vous-même à cette étude, je me permets de vous transmettre un court extrait de mon manuscrit.

I. — Réduction des formules primitives en coordonnées obliques.

Comme vous, Monsieur, je place aussi le point capital de cette étude dans l'introduction des coordonnées a, b, c pour déterminer une direction dans l'espace et je les appelle les *coordonnées de direction*. Par ce moyen, la transformation des formules primitives pour des coordonnées cartésiennes quelconques se fait de la façon suivante :

1. Carré du rayon vecteur (r^2):

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy\cos(x,y) + 2xz\cos(x,z) + 2yz\cos(y,z)$$
$$= c_{1,1}x^2 + 2c_{1,2}xy + \ldots + c_{3,3}z^2 \equiv \psi(x,y,z).$$

2. En déplaçant le système des coordonnées parallèlement à lui-même, on obtient, pour le carré (R^2) de la distance de deux points x, y, z et x_1, y_1, z_1,

$$R^2 = \psi(x_1 - x, y_1 - y, z_1 - z).$$

3. Étant données deux directions par leurs coordonnées a, b, c et a_1, b_1, c_1, on cherche l'angle φ qu'elles font entre elles.

Dans le triangle formé par les points a, b, c, a_1, b_1, c_1 et l'origine des coordonnées, on a, d'après le n° 2 et le théorème de Pythagore,

$$\psi(a_1 - a, b_1 - b, c_1 - c) = 1^2 + 1^2 - 2.1.1\cos\varphi,$$

c'est-à-dire

$$\cos \nu = a_1 \tfrac{1}{2}\psi'(a) + b_1 \tfrac{1}{2}\psi'(b) + c_1 \tfrac{1}{2}\psi'(c),$$

ce qui donne, pour $\nu = 90°$,

$$0 = a_1 \tfrac{1}{2}\psi'(a) + b_1 \tfrac{1}{2}\psi'(b) + c_1 \tfrac{1}{2}\psi'(c),$$

pour $a_1 = 1, b_1 = 0, c_1 = 0, \ldots,$

$$\cos(x, r) = \tfrac{1}{2}\psi'(a),$$
$$\cos(y, r) = \tfrac{1}{2}\psi'(b),$$
$$\cos(z, r) = \tfrac{1}{2}\psi'(c).$$

4. Soit un plan à une distance δ de l'origine, δ ayant pour coordonnées de direction a, b, c. Les coordonnées du pied de la normale δ sont δa, δb, δc.

Si l'on appelle R la distance d'un point quelconque (x, y, z) du plan à ce pied, et a', b', c' les coordonnées de direction de la droite qui joint les deux points (x, y, z), $(\delta a, \delta b, \delta c)$, on a

$$Ra' = x - \delta a, \quad Rb' = y - \delta b, \quad Rc' = z - \delta c;$$

d'où

$$(x - \delta a)\tfrac{1}{2}\psi'(a) + (y - \delta b)\tfrac{1}{2}\psi'(b) + (z - \delta c)\tfrac{1}{2}\psi'(c) = 0,$$

ou

$$x\tfrac{1}{2}\psi'(a) + y\tfrac{1}{2}\psi'(b) + z\tfrac{1}{2}\psi'(c) - \delta = 0,$$

pour l'équation du plan.

On peut remplacer les coefficients de x, y, z dans la dernière équation par $\cos(\delta, x)$, $\cos(\delta, y)$, $\cos(\delta, z)$. *Mais il vaut mieux conserver* $\tfrac{1}{2}\psi'(a), \ldots.$

5. Inversement, étant donnée une équation quelconque

$$Ax + By + Cz + d = 0,$$

on peut, par l'introduction d'un facteur proportionnel μ,

déterminer a, b, c, δ par les relations suivantes :

$$\mu A = \tfrac{1}{2}\psi'(a), \quad \mu B = \tfrac{1}{2}\psi'(b), \quad \mu C = \tfrac{1}{2}\psi'(c),$$
$$\mu d = -\delta, \quad \psi(a, b, c) = 1.$$

Si l'on fait

$$[\sin^2(x, y, z) =]\, \Sigma \pm (c_{1,1}, c_{2,2}, c_{3,3}) = D, \quad \frac{\partial d}{\partial c_{1,k}} = D_{ik},$$
$$\Psi(u, v, w) = D_{1,1}u^2 + 2D_{1,2}uv + \ldots + D_{3,3}w^2,$$

on aura

$$Da = \tfrac{1}{2}\mu\Psi'(A), \quad Db = \tfrac{1}{2}\mu\Psi'(B), \quad \ldots,$$

$\mu = \sqrt{D : \Psi(A, B, C)}$, où μ doit avoir le signe de $-d$.

6. Étant donnés deux plans

$$Ax + By + Cz + d = 0, \quad A'x + B'y + C'z + d' = 0,$$

on obtient leur angle par la formule

$$\cos v = \mu(Aa_1 + Bb_1 + Cc_1)$$
$$\cos v = [A\tfrac{1}{2}\psi'(A_1) + B\tfrac{1}{2}\psi'(B_1) + C\tfrac{1}{2}\psi'(C_1)] : \sqrt{\Psi\Psi_1}$$

et

$$\Psi = D_{1,1}A^2 + 2D_{1,2}AB + D_{3,3}C^2,$$
$$\Psi_1 = D_{1,1}A_1^2 + 2D_{1,2}A_1B_1 + \ldots$$

7. Étant donnés trois axes rectangulaires par leurs coordonnées a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' par rapport à un système de coordonnées obliques, on a, d'une part

$$\cos(X, r) = \tfrac{1}{2}\psi'(a)\frac{x}{r} + \tfrac{1}{2}\psi'(b)\frac{y}{r} + \tfrac{1}{2}\psi'(c)\frac{z}{r},$$

d'autre part, $\cos(X, r) = X : r$; d'où, pour les formules de transformation,

$$(\alpha) \qquad \begin{cases} X = \tfrac{1}{2}\psi'(a)X + \tfrac{1}{2}\psi'(b)y + \tfrac{1}{2}\psi'(c)z, \\ Y = \tfrac{1}{2}\psi'(a')X + \tfrac{1}{2}\psi'(b')y + \tfrac{1}{2}\psi'(c')z, \\ Z = \tfrac{1}{2}\psi'(a'')X + \tfrac{1}{2}\psi'(b'')y + \tfrac{1}{2}\psi'(c'')z. \end{cases}$$

En résolvant, on obtient des expressions de la forme

$$(\beta) \qquad \begin{cases} x = aX + a'Y + a''Z, \\ y = bX + b'Y + b''Z, \\ z = cX + c'Y + c''Z. \end{cases}$$

II. — De la direction des axes principaux.

Le plan polaire d'un point quelconque x_1, y_1, z_1 par rapport à une surface du second ordre

$$f = a_{1,1}x^2 + 2a_{1,2}xy + \ldots + a_{3,3}z^2 + 2a_{1,4}x + \ldots + a_{4,4} = 0$$

est donné par

$$x_1 f_1 + y_1 f_2 + z_1 f_3 + f_4 = 0,$$
$$f_i = a_{i,1}x + a_{i,2}y + a_{i,3}z + a_{i,4}$$

Si l'on pose

$$x_1 = r_1 a, \quad y_1 = r_1 b, \quad z_1 = r_1 c,$$

et si l'on divise par r_1, on obtient, pour $r_1 = \infty$,

$$af_1 + bf_2 + cf_3 = 0,$$

c'est-à-dire l'équation du plan diamétral conjugué de la direction a, b, c.

J'obtiens ainsi comme vous, très honoré Monsieur, les *directions* des axes principaux; mais peut-être arrive-t-on aussi un peu plus rapidement à la formule

$$\varphi(x, y, z) = SX^2 + S'Y^2 + S''Z^2$$

par le moyen suivant.

D'après le n° 7 (β), on obtient, en multipliant par $a_{i,1}$, $a_{i,2}$, $a_{i,3}$,

$$\tfrac{1}{2}\varphi'(x) = S\tfrac{1}{2}\psi'(a)X + S'\tfrac{1}{2}\psi'(a')Y + S''\tfrac{1}{2}\psi'(a'')Z,$$
$$\tfrac{1}{2}\varphi'(y) = S\tfrac{1}{2}\psi'(b)X + S'\tfrac{1}{2}\psi'(b')Y + S''\tfrac{1}{2}\psi'(b'')Z,$$
$$\tfrac{1}{2}\varphi'(z) = S\tfrac{1}{2}\psi'(c)X + S'\tfrac{1}{2}\psi'(c')Y + S''\tfrac{1}{2}\psi'(c'')Z,$$

ce qui donne, d'après le n° 7 (α),

$$x\tfrac{1}{2}\varphi'(x) + y\tfrac{1}{2}\varphi'(y) + z\tfrac{1}{2}\varphi'(z) = (SX)X + (S'Y)Y + (S''Z)Z.$$

Si l'on applique ce résultat au cas où

$$a_{1,2} = a_{2,3} = a_{3,1} = 0,$$

on obtient sans calcul tous les théorèmes sur les diamètres conjugués d'une surface

$$a_{1,3}x^2 + a_{2,2}y^2 + a_{3,3}z^2 = K.$$

III. — De la longueur des axes principaux.

Surfaces à centre. — La définition du centre donne, comme pour les coordonnées rectangulaires, pour ses coordonnées obliques A, B, C, les équations

$$\tfrac{1}{2}f'(A) = 0, \quad \tfrac{1}{2}f'(B) = 0, \quad \tfrac{1}{2}f'(C) = 0.$$

Si l'on regarde A, B, C comme les coordonnées d'un point variable, ces trois équations représentent trois plans, qui se coupent: 1° en un seul point; 2° suivant une droite; 3° suivant un plan, et, dans les cas 1° et 2°, le point où la droite peut être à distance finie ou infinie. Si nous mettons ce dernier cas de côté, pour chaque sytème de solutions des équations

$$(1) \qquad a_{i,1}A + a_{i,2}B + a_{i,3}C + a_{i,4} = 0 \quad (i = 1, 2, 3),$$

l'expression

$$a_{4,1}A + a_{4,2}B + a_{4,3}C + a_{4,4}$$

sera toujours égale à la *même* constante K : car, si $A_1 B_1 C_1$ est un deuxième point vérifiant le système (1), il faut démontrer que l'on a

$$a_{1,4}A_1 + a_{2,4}B_1 + a_{3,4}C_1 + a_{4,4} = K,$$

expression obtenue en ajoutant les équations (1), multipliées par A_1, B_1, C_1, à l'expression

$$a_{4,1}A + a_{4,2}B + a_{4,3}C + a_{4,4} = K.$$

On trouve facilement que, pour le premier cas, on a

$$K = A : A_{4,4} \left(A = \Sigma \pm a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}a_{4,4}, \ A_{ik} = \frac{\partial A}{\partial a_{i,k}} \right),$$

dans le deuxième cas

$$K = A_{1,1} : \Delta_{1,1} = A_{1,2} : \Delta_{1,2} = \ldots = A_{3,3} : \Delta_{3,3} \left(\Delta_{i,k} = \frac{\partial A_{4,4}}{\partial a_{i,k}} \right),$$

dans le troisième cas

$$K = (a_{l,4} a_{m,4} - a_{4,4} a_{l,m}) : a_{l,m} (l, m = 1, 2, 3).$$

Donc, si une surface

$$f(\xi, \eta, \zeta) = \varphi(\xi, \eta, \zeta) + 2a_{1,4}\xi + 2a_{2,4}\eta + \ldots + a_{4,4} = 0$$

a un centre à distance finie, le problème de la *longueur* des axes se trouve résolu par la transformation

$$\xi = x + A, \quad \eta = y + B, \quad \zeta = z + C.$$

Son équation en fonction des axes devient, d'après le § II,

$$SX^2 + S'Y^2 + S''Z^2 + K = 0.$$

Dans le cas des paraboloïdes, on définit le sommet α, β, γ par les équations

$$\begin{gathered}
\tfrac{1}{2} f'(\alpha) = \rho \tfrac{1}{2} \psi'(a), \\
\tfrac{1}{2} f'(\beta) = \rho \tfrac{1}{2} \psi'(b), \\
\tfrac{1}{2} f'(\gamma) = \rho \tfrac{1}{2} \psi'(c), \\
a_{4,1}\alpha + a_{4,2}\beta + a_{4,3}\gamma + a_{4,4} = -\rho d, \\
\tfrac{1}{2}\psi'(a)\alpha + \tfrac{1}{2}\psi'(b)\beta + \tfrac{1}{2}\psi'(c)\gamma - d = 0,
\end{gathered}$$

a, b, c étant les coordonnées de la direction des axes pour $S = 0$. Une analyse plus profonde montre que

$$\rho^2 = (a_{1,4} a + a_{2,4} b + a_{3,4} c)^2 = -A : (\Delta_{1,1} + \ldots) = -A : \delta A_{4,4},$$

si, pour une fonction χ des coefficients $a_{i,k}$ $(i, k = 1, 2, 3)$, on pose

$$\delta\chi = \frac{\partial \chi}{\partial a_{1,1}} + \ldots + \frac{2\partial\chi}{\partial a_{1,2}} \cos(x, y) + \ldots.$$

On obtient de plus

$$\rho a = -A_{1,4} : \delta A_{4,4}, \quad \rho b = -A_{2,4} : \delta A_{4,4} \ldots, \quad \rho c = -A_{3,4} : \delta A_{4,4},$$

$$\rho d = \frac{1}{2}\left(\frac{A\,\delta^2 A_{4,4}}{2} - \delta A\,\delta A_{4,4}\right) : \delta A_{4,4} \; (^1).$$

Si l'on admet que, pour les racines S, S', S'', l'équation est

$$\Delta_0 - \Delta_1 S + \Delta_2 S^2 - \Delta_3 S^3 = 0,$$

on obtient, pour équation du plan tangent au sommet,

$$A_{1,4}\tfrac{1}{2}\psi'(x) + A_{2,4}\tfrac{1}{2}\psi'(y) + A_{3,4}\tfrac{1}{2}\psi'(z) + \tfrac{1}{2}(A\,\Delta_2 - \delta A\,\Delta_1) : \Delta_1 = 0.$$

Pour α, β, γ même, on obtient $(i = 1, 2, 3)$

$$\alpha = \delta A_{1,4}\Delta_1^{-1} - \tfrac{1}{2}(\delta A\,\Delta_1 + A\,\Delta_2)\Delta_{i,1}A_{4,i}^{-1}(\Delta_1)^{-2},$$
$$\beta = \delta A_{2,4}\Delta_1^{-1} - \tfrac{1}{2}(\delta A\,\Delta_1 + A\,\Delta_2)\Delta_{i,2}A_{4,i}^{-1}(\Delta_1)^{-2},$$
$$\gamma = \delta A_{3,4}\Delta_1^{-1} - \tfrac{1}{2}(\delta A\,\Delta_1 + A\,\Delta_2)\Delta_{i,3}A_{4,i}^{-1}(\Delta_1)^{-2},$$

ou, sous une forme symétrique,

$$\alpha = \delta A_{1,4}\Delta_1^{-1} - \tfrac{1}{2}(A\,\Delta_2 + \delta A\,\Delta_1)A^{-1}\Delta_1^{-2}A_{1,4},$$
$$\beta = \delta A_{2,4}\Delta_1^{-1} - \tfrac{1}{2}(A\,\Delta_2 + \delta A\,\Delta_1)A^{-1}\Delta_1^{-2}A_{2,4},$$
$$\gamma = \delta A_{3,4}\Delta_1^{-1} - \tfrac{1}{2}(A\,\Delta_2 + \delta A\,\Delta_1)A^{-1}\Delta_1^{-2}A_{3,4}.$$

Par la transformation

$$x = \xi - \alpha, \quad y = \eta - \beta, \quad z = \zeta - \gamma$$

l'équation

$$f(\xi, \eta, \zeta) = 0$$

devient

$$\varphi(x, y, z) + 2\rho(ax + by + cz) = 0$$

ou, en vertu des formules du § II,

$$S''Y^2 + S''Z^2 + 2\rho X = 0.$$

Dans le cas où $S = S' = 0$, en introduisant les ex-

(1) L'équation en S est évidemment, d'après le théorème de Taylor,

$$A_{4,4} - S\,\delta A_{4,4} + \frac{S^2\delta^2 A_{4,4}}{2} - S^3(\Sigma \pm c_{1,1}, c_{2,2}, c_{3,3}) = 0.$$

pressions

$$\Phi(u, v, w) = \Delta_{1,1} u^2 + 2\Delta_{1,2} uv + \ldots,$$

$$\sigma^2 = (a_{1,4} a'' + a_{2,4} b'' + a_{3,4} c'')^2$$
$$= \delta[\Phi(a_{1,4}, a_{2,4}, a_{3,4})] : \Delta_2 = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial a_{1,1}} + \cdots\right) : \Delta_2,$$

on obtient, pour la fonction $f(\xi, \eta, \zeta)$,

$$f(\xi, \eta, \zeta) = S'' Z^2 + 2\sigma Y,$$

où

$$Z = \frac{1}{2}\psi'(x)a'' + \frac{1}{2}\psi'(y)b'' + \frac{1}{2}\psi'(z)c'' + \frac{a_{14}a'' + \ldots}{S},$$

$$2\sigma Y = \frac{\partial\Phi}{\partial a_{1,4}}\psi'(x) + \frac{\partial\Phi}{\partial a_{2,4}}\psi'(y) + \frac{\partial\Phi}{\partial a_{3,4}}\psi'(z)$$
$$+ a_{4,4} - \Delta_2^{-1} \Sigma_{k=1}^{k=3} \Sigma_{\lambda=1}^{\lambda=3} C_{k,\lambda} \alpha_{4,k} a_{4,\lambda} + \sigma^2 \Delta_3 \Delta_2^{-1}.$$

IV. — De la direction des axes dans la section conique donnée.

$$\varphi(x, y, z) + K = 0, \quad X = \tfrac{1}{2}\psi'(a)x + \tfrac{1}{2}\psi'(b)y + \tfrac{1}{2}\psi'(c)z = 0.$$

Comme pour des coordonnées rectangulaires, on trouve

$$\varphi(x, y, z) = \lambda' Y^2 + \lambda'' Z^2 - 2\mu' XY - 2\mu'' XZ + \varphi(a, b, c)X^2,$$

où

$$Y = \tfrac{1}{2}\psi'(a')x + \tfrac{1}{2}\psi'(b)y + \tfrac{1}{2}\psi'(c')z,$$
$$Z = \tfrac{1}{2}\psi'(a'')x + \tfrac{1}{2}\psi'(b'')y + \tfrac{1}{2}\psi'(c'')z,$$

et de plus

$$(a_{i,1} - \lambda' c_{i1})a' + (a_{i,2} - \lambda' c_{i,2})b' + (a_{i,3} - \lambda' c_{i,3})c' + \mu' \tfrac{1}{2}\psi'(a) = 0,$$
$$\tfrac{1}{2}\psi'(a)a' + \tfrac{1}{2}\psi'(b)b' + \tfrac{1}{2}\psi'(c)c' + \mu'.0 = 0,$$
$$\tfrac{1}{2}\varphi'(a)x + \tfrac{1}{2}\varphi'(b)y + \tfrac{1}{2}\varphi'(c)z = \varphi(a, b, c)X - \mu' Y - \mu'' Z,$$

. . . .

V. — De la longueur des axes de la section de

$$f(\xi, \eta, \zeta) = 0, \quad \tfrac{1}{2}\psi'(a)\xi + \tfrac{1}{2}\psi'(b)\eta + \tfrac{1}{2}\psi'(c)\zeta + d = 0.$$

La définition d'un centre A, B, C nous donne

$$(1) \qquad \frac{\frac{1}{2}f'(A)}{\frac{1}{2}\psi'(a)} = \frac{\frac{1}{2}f'(B)}{\frac{1}{2}\psi'(b)} = \frac{\frac{1}{2}f'(C)}{\frac{1}{2}\psi'(c)} (= -\mu),$$

$$(2) \qquad \tfrac{1}{2}\psi'(a)A + \tfrac{1}{2}\psi'(b)B + \tfrac{1}{2}\psi'(c)C + d = 0.$$

Les équations (1) représentent une droite qui, avec le plan (2), définissent : 1° un seul point, 2° tous les points de la droite, et cela : (*a*) à distance finie, (*b*) à l'infini [1].

Dans le cas (*a*), on démontre facilement qu'en introduisant un système (x, y, z) par les formules

$$\xi = x + A, \quad \eta = y + B, \quad \zeta = z + C,$$

$f(\xi, \eta, \zeta)$ devient

$$\varphi(x, y, z) - 2\mu X + K,$$

K ayant toujours la même valeur.

Si l'on pose

$$\begin{aligned} F &= A_{11}[\tfrac{1}{2}\psi'(a)]^2 + 2A_{12}\tfrac{1}{2}\psi'(a)\tfrac{1}{2}\psi'(b) \\ &\quad + \ldots + 2A_{14}\tfrac{1}{2}\psi'(a)d + \ldots + A_{44}d^2, \end{aligned}$$

$$D_0 = -\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & \frac{1}{2}\psi'a \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{1}{2}\psi'a & \ldots & 0 \end{vmatrix}, \qquad \begin{aligned} F_{ik} &= \frac{\partial F}{\partial a_{i,k}}, \\ D_{ik} &= \frac{\partial D_0}{\delta a_{i,k}}, \\ D_1 &= \delta D_0, \\ 2D_2 &= \delta^2 D_0, \end{aligned}$$

---

[1] Le critérium résulte des déterminants connus, comme au § III.

on obtient, pour le cas (1^a),

$$K = (F : D_0),$$

pour le cas (2^a),

$$K = (F_{ik} : D_{ik}) \quad (k = 1, 2, 3).$$

Dans le cas (1^b) de la parabole, on définit un point α, β, γ de la section par la condition que sa tangente soit perpendiculaire à la direction a', b', c', qui appartient à la racine $\lambda' = 0$.

Si l'on pose

$$f_i = a_{i1}\alpha + a_{i2}\beta + a_{i3}\gamma + a_{i4} \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

on trouve, par l'introduction des signes,

$$\begin{aligned}
\rho &= a_{14}a + a_{24}b + a_{34}c,\\
\sigma^2 &= (a_{14}a' + a_{24}b' + a_{34}c')^2 = -(F : \delta D_0),\\
f_1 &= \rho\,\tfrac{1}{2}\psi'(a) + \sigma\,\tfrac{1}{2}\psi'(a'),\\
f_2 &= \rho\,\tfrac{1}{2}\psi'(b) + \sigma\,\tfrac{1}{2}\psi'(b'),\\
f_3 &= \rho\,\tfrac{1}{2}\psi'(c) + \sigma\,\tfrac{1}{2}\psi'(c'),\\
f_4 &= \rho d + \sigma\delta,\\
&\tfrac{1}{2}\psi'(a)\alpha + \tfrac{1}{2}\psi'(b)\beta + \tfrac{1}{2}\psi'(c)\gamma + d = 0,\\
&\tfrac{1}{2}\psi'(a')\alpha + \tfrac{1}{2}\psi'(b')\beta + \tfrac{1}{2}\psi'(c')\gamma + \delta = 0,
\end{aligned}$$

et de là,

$$\begin{aligned}
\alpha &= \delta F_{14} D_1^{-1} - \tfrac{1}{2}(FD_2 + \delta F D_1)F^{-1}D_1^{-2}F_{14},\\
\beta &= \delta F_{24} D_1^{-1} - \tfrac{1}{2}(FD_2 + \delta F D_1)F^{-1}D_1^{-2}F_{24},\\
\gamma &= \delta F_{34} D_1^{-1} - \tfrac{1}{2}(FD_2 + \delta F D_1)F^{-1}D_1^{-2}F_{34}.
\end{aligned}$$

Par les substitutions

$$\begin{aligned}
x &= \xi + \alpha,\\
y &= \eta + \beta,\\
z &= \zeta + \gamma,
\end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned}
f(\xi, \eta, \zeta) = \varphi(x, y, z) &+ 2\rho X\\
&+ 2\sigma\left[\tfrac{1}{2}\psi'(a')x + \tfrac{1}{2}\psi'(b')y + \tfrac{1}{2}\psi'(c')z\right],
\end{aligned}$$

ce qui donne, pour $X = 0$, l'équation de la section

$$\lambda'' Z^2 + 2\sigma Y = 0, \quad Y = \tfrac{1}{2}\psi'(a')X + \tfrac{1}{2}\psi'(b')y + \tfrac{1}{2}\psi'(c')z,$$

et l'équation $Y = 0$, en coordonnées ξ, η, ζ, est

$$F_{14}\tfrac{1}{2}\psi'(x) + \ldots + \tfrac{1}{2}(FD_2 - \delta FD_1) : D_1 = 0.$$

Dans le cas (2^b), on a

$$\lambda' = \lambda'' = 0,$$

et le système des formules s'obtient parce que, d'après le § IV, on a alors

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = [\xi\varphi'(a) + \eta\varphi'(b) + \zeta\varphi'(c)](X - d) + \varphi(a, b, c)(X - d)^2.$$

J'ai étendu tous ces développements au cas de coordonnées tétraédriques quelconques. Les méthodes précédentes (*voir* Hesse, Salmon) sont toujours en défaut, quand la surface est un cône ou un système de deux plans ; elles ne donnent de résultats que lorsqu'on regarde la surface comme l'enveloppe de plans : donc, dans le cas d'une variété, pour les sections coniques dans l'espace et pour des paires de points. Si l'on traite les surfaces du second ordre d'une manière générale, en les regardant comme formées de séries de points, on doit évidemment donner la définition suivante des plans principaux :

Un plan P dans l'espace a, par rapport au cercle sphérique imaginaire, un pôle déterminé. Quand le plan polaire de ce pôle se confond avec P, P est un plan principal.

Je démontrerai ailleurs comment toutes les formules découlent de là. Comme, en ce moment, je n'ai pas le loisir nécessaire pour les publier, je vous serais infiniment obligé de recevoir quelques-uns des résultats ci-joints (surtout aux § III et V) comme *exercices*, dans vos excellentes *Annales*.

Darmstadt, 22 juin 1882.

THÉORÈMES SUR TROIS CONIQUES D'UN FAISCEAU LINÉAIRE;

PAR M. WEILL.

On sait que les coniques qui passent par quatre points fixes sont coupées par une droite fixe en des points formant involution. Considérons une conique et deux cercles quelconques, mais ayant le même centre, et soient AB et CD deux cordes communes à la conique et au premier cercle, et M, N, P, Q les quatre points communs à la conique et au deuxième cercle; menons MN, qui rencontre le premier cercle, en α et β, et les cordes AB et CD, en γ et δ. La conique, le premier cercle et le système des droites AB, CD constituent trois coniques d'un faisceau linéaire : donc la droite MN les rencontre en six points γ, α, M, N, β, δ en involution; l'un des points doubles de cette involution est à l'infini, car le milieu de MN est aussi le milieu de $\alpha\beta$, puisque les deux cercles sont concentriques; donc ce milieu est aussi le milieu du segment $\gamma\delta$. On en conclut qu'il existe une conique passant par M, N, P, Q et ayant AB et CD pour asymptotes. On peut alors énoncer les théorèmes suivants :

THÉORÈME I. — *Étant donnés quatre points* M, N, P, Q *communs à un cercle et à une conique, il existe une conique passant en* M, N, P, Q *et ayant pour asymptotes deux cordes* AB *et* CD, *communes à la conique et à un cercle quelconque concentrique au premier.*

THÉORÈME II. — *L'enveloppe des asymptotes des coniques passant par quatre points fixes* M, N, P, Q, *communs à un cercle et à une conique fixe, coïncide avec l'enveloppe des cordes communes à la conique fixe et à une série de cercles concentriques au premier.*

THÉORÈME III. — *Les quatre points où les asymptotes d'une conique variable passant par quatre points fixes* M, N, P, Q *communs à un cercle et à une conique donnés rencontrent cette conique sont sur un cercle concentrique au premier.*

En transformant ce dernier théorème par homographie, on obtient le théorème que nous avions principalement en vue et qui s'énonce ainsi :

THÉORÈME IV. — *Étant données trois coniques ayant les mêmes points communs* M, N, P, Q, *deux tangentes quelconques en* α *et* β *à la première rencontrent la deuxième en* A, B, C, D ; *il existe une conique passant par* A, B, C, D *et bitangente à la troisième conique fixe aux points* I *et* J *où cette troisième conique est rencontrée par la droite* $\alpha\beta$.

Ce théorème est très général et susceptible d'applications nombreuses. Nous allons énoncer quelques-uns des résultats auxquels il conduit.

THÉORÈME V. — *Étant donnés une conique fixe* C *et deux points fixes* A, B, *on mène par* A *et* B *une conique quelconque* C' *qui rencontre la première en* M, N, P, Q ; *les points doubles de l'involution déterminée sur la droite* AB *par les coniques passant par* M, N, P, Q *sont des points fixes, quelle que soit la conique* C'.

THÉORÈME VI. — *Les cordes* IJ *de contact d'une conique fixe* C *et des coniques passant par deux points fixes* A, B *et bitangentes à* C *forment deux faisceaux distincts. Les sommets de ces faisceaux sont les points* M, N *situés sur* AB, *et harmoniques conjugués par rapport à* AB, *et par rapport aux deux points de rencontre de la droite* AB *et de la conique* C.

THÉORÈME VII. — *Il existe quatre coniques bitangentes à une conique* C *et passant par trois points donnés* P, Q, R; *si l'on prend les points* α, β *conjugués harmoniques par rapport à* PQ, *et par rapport aux deux points de rencontre de la droite* PQ *et de la conique* C, *et si l'on opère de même pour* QR *et* PR, *on aura six points* α, β, α', β', α'', β'', *formant les sommets d'un quadrilatère complet; les côtés de ce quadrilatère sont les quatre cordes de contact.*

THÉORÈME VIII. — *Étant données trois coniques inscrites dans le quadrilatère, si, de deux points* A *et* B *de la première, on mène des tangentes à la deuxième, il existe une conique tangente à ces quatre tangentes et bitangente à la troisième conique donnée, et le pôle de la corde de contact coïncide avec le pôle de* AB *par rapport à la première conique.*

THÉORÈME IX. — *Étant données deux coniques inscrites dans le même quadrilatère, si, de deux points* A *et* B *de la première, on mène des tangentes à la deuxième, il existe une conique tangente à ces quatre droites et passant par deux sommets opposés* P, Q *du quadrilatère donné; le pôle de* PQ *par rapport à la conique coïncide avec le pôle de* AB *par rapport à la conique fixe passant par* A *et* B.

THÉORÈME X. — *Étant données deux coniques homofocales, si, de deux points* A *et* B *de l'une, on mène des tangentes à l'autre, il existe une conique passant par les foyers communs et tangente à ces quatre tangentes; le pôle de* FF' *par rapport à cette conique coïncide avec le pôle de* AB *par rapport à la conique passant par* A *et* B.

THÉORÈME XI. — *Étant données deux coniques ho-*

mofocales, si, de deux points A *et* B *de l'une, on mène des tangentes à l'autre, on forme un quadrilatère circonscriptible à un cercle; le centre de ce cercle est le pôle de* AB *par rapport à la conique passant par* A *et* B; *deux sommets opposés du quadrilatère formé par les quatre tangentes sont sur une conique homofocale aux proposées.*

Ce dernier théorème, énoncé par Chasles, donne immédiatement les propriétés métriques relatives aux foyers.

Du théorème I, on déduit les suivants :

Théorème XII. — *Soient* AB, CD *deux cordes communes à une conique et à un cercle, soit* P *le centre du cercle; si, du point* P, *on abaisse une normale* PK *sur la conique, la tangente à la conique au point* K *rencontre* AB *et* CD *en deux points équidistants du point* K.

Théorème XIII. — *Étant donné un quadrilatère inscriptible* ABCD, *on considère deux couples de côtés,* AB, CD *d'une part, et* AC, BD *d'autre part. Les droites variables, sur lesquelles les deux couples interceptent des segments égaux* PQ, RS, *ont pour enveloppe une courbe dont la podaire, par rapport au centre* O *du cercle, est une hyperbole équilatère passant par* O. *Le lieu du milieu* K *du segment* PR, *qui est aussi le milieu de* QS, *est cette même hyperbole équilatère, qui n'est autre que le lieu des pieds des normales abaissées du point* O *sur toutes les coniques passant par* ABCD; *enfin, cette hyperbole équilatère est aussi le lieu des centres des coniques passant par* ABCD.

Théorème XIV. — *Étant données trois surfaces du second ordre passant par la même courbe gauche du quatrième ordre, on mène en deux points* P *et* Q *de la*

surface S *les plans tangents; il existe une surface du second ordre passant par les coniques d'intersection de ces plans tangents avec la surface* S_1 *et bitangente à la surface* S_2 *aux points où elle est rencontrée par la droite* PQ.

Pour démontrer ce théorème, dont on peut déduire le théorème IV, en faisant une section plane, considérons la surface

$$S = A\alpha^2 + A_1\beta^2 + 2B\alpha\beta + 2D\gamma\delta = 0.$$

Soit $S_1 = 0$ la deuxième surface. La troisième surface $S_2 = 0$ pourra s'écrire

$$S_2 = A\alpha^2 + A_1\beta^2 + 2B\alpha\beta + 2D\gamma\delta + \lambda S_1 = 0,$$

d'où l'*identité*

$$S_2 - (A\alpha^2 + A_1\beta^2 + 2B\alpha\beta) = \lambda S_1 + 2D\gamma\delta.$$

Cette identité démontre le théorème énoncé; en effet, le premier membre représente une surface bitangente à la surface S_2, la corde de contact passant par l'intersection PQ des plans $\alpha = 0$, $\beta = 0$; le second membre représente une surface passant par l'intersection de la surface S_1 et des plans $\gamma = 0$, $\delta = 0$ qui sont justement tangents à la surface S aux points P et Q. Ce théorème, d'une démonstration si simple, a de nombreuses conséquences, que l'on développe aisément.

SEMI-DROITES RÉCIPROQUES PARALLÈLES A L'AXE DE TRANSFORMATION;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE.

La construction de la semi-droite réciproque d'une semi-droite donnée, qui résulte de la définition [1], n'est

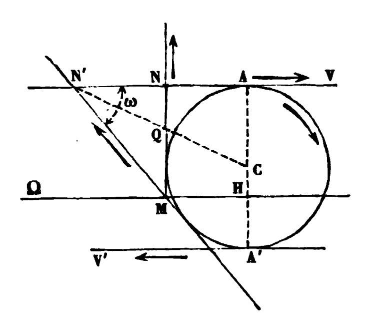
---

[1] *Nouv. Ann.*, 3ᵉ série, t. I, p. 546, § 9.

pas applicable à une semi-droite parallèle à l'axe de transformation. Nous allons démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Le rapport des distances à l'axe* Ω, *de deux semi-droites réciproques parallèles à* Ω, *est égal à la tangente du demi-angle que fait* Ω *avec la réciproque d'une perpendiculaire à cet axe.*

Soient AV et A'V' deux semi-droites réciproques parallèles à l'axe Ω; prenons une semi-droite MN perpen-



diculaire à Ω et sa réciproque MN'. D'après un théorème démontré par M. Laguerre ([1]), ces deux couples de semi-droites sont tangents à un même cycle C.

Cela posé, nous avons

$$AH + A'H = 2AC = 2AN' \operatorname{tang}\frac{\omega}{2},$$

ou, d'après un théorème bien connu, en appelant $2p$ le périmètre du triangle MNN',

$$(1) \qquad AH + A'H = 2p \operatorname{tang}\frac{\omega}{2}.$$

([1]) *Nouv. Ann.*, 3e série, t. I, p. 547.

D'ailleurs,

$$\mathrm{AH} = \mathrm{MN} = \mathrm{MQ} + \mathrm{QN} = \frac{\mathrm{MN}' \sin\frac{\omega}{2}}{\sin \mathrm{Q}} + \mathrm{NN}' \operatorname{tang}\frac{\omega}{2}$$
$$= (\mathrm{MN}' + \mathrm{NN}') \operatorname{tang}\frac{\omega}{2},$$

ou

$$(2) \qquad \mathrm{AH} = (2p - \mathrm{AH}) \operatorname{tang}\frac{\omega}{2}.$$

Retranchant l'égalité (2) de l'égalité (1) membre à membre, nous avons

$$\mathrm{A'H} = \mathrm{AH} \operatorname{tang}\frac{\omega}{2}$$

ou

$$\frac{\mathrm{A'H}}{\mathrm{AH}} = \operatorname{tang}\frac{\omega}{2}.$$

L'angle ω étant indépendant des semi-droites parallèles considérées, le théorème est établi.

NOTE SUR LA SYMÉDIANE;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE.

A l'occasion de ma Note *Sur un élément du triangle rectiligne; symédiane* (¹), j'ai reçu de M. E. Lemoine, ancien élève de l'École Polytechnique, deux Notes présentées par lui à l'*Association française pour l'avancement des Sciences*, l'une en 1873, au Congrès de Lyon; l'autre, en 1874, au Congrès de Lille.

Je m'empresse de dire que le point remarquable du triangle auquel ces Notes sont consacrées n'est autre que le point de concours ou *centre des symédianes*, que M. Le-

(¹) *Nouv. Ann.*, 3ᵉ série, t. II, p. 450.

moine appelle *centre des médianes antiparallèles* [1].

Mais, M. Lemoine s'est attaché surtout aux propriétés de ce point, tandis que je me suis plutôt occupé de la *symédiane* elle-même, en sorte que, à part certains théorèmes qui se présentent d'eux-mêmes au seuil de cette étude, nous avons obtenu des résultats différents.

Je crois être agréable aux lecteurs des *Nouvelles Annales* en leur faisant connaître les élégants théorèmes de M. Lemoine, antérieurs, je le répète, à mes recherches personnelles. Mais, malgré les titres que vaut à M. Lemoine sa priorité, je conserverai le terme de *symédiane*, plus court que celui de *médiane antiparallèle*.

Je donnerai ensuite quelques propriétés de la symédiane que j'ai trouvées depuis la publication de ma première Note.

Théorèmes de M. Lemoine.

— Les coordonnées trilinéaires du *centre des symédianes*, le triangle ABC étant pris pour triangle de référence, sont sin A, sin B, sin C.

— Le lieu des points tels que la somme des carrés de leurs distances aux trois côtés d'un triangle est constante, est une ellipse qui a pour centre le *centre des symédianes*.

— Les six points déterminés sur les côtés du triangle par les parallèles à ces côtés menées par le *centre des symédianes* sont sur un cercle dont le centre est au milieu de la ligne qui joint le *centre des symédianes* au centre du cercle circonscrit.

Les cordes que les côtés déterminent dans ce cercle

---

[1] Mon excuse d'avoir ignoré les recherches de M. Lemoine sera que les procès-verbaux de l'Association française sont peu répandus.

sont proportionnelles aux cubes des côtés correspondants.

Les cordes comprises entre les côtés sont égales, et sont antiparallèles des côtés opposés par rapport aux angles correspondants.

— Si le triangle A′B′C′ est homothétique du triangle ABC par rapport au *centre des symédianes* de celui-ci, les six points déterminés par les côtés de A′B′C′ sur les côtés de ABC sont sur un cercle.

— La droite qui joint le milieu d'un côté au milieu de la hauteur correspondante passe par le *centre des symédianes.*

Cette droite est le lieu du centre des rectangles inscrits dans le triangle, et ayant leur base sur le côté considéré.

Le *centre des symédianes* est donc le centre de trois rectangles inscrits dans le triangle, et il jouit seul de cette propriété.

— La conique inscrite dans un triangle, et qui a pour centre le *centre des symédianes* touche les côtés aux pieds des hauteurs.

— La conique inscrite dans un triangle et dont l'un des foyers est au centre de gravité a son autre foyer au *centre des symédianes.*

— Soient O_a, O_b, O_c les centres des cercles exinscrits au triangle ABC. Les polaires de A, B, C prises respectivement par rapport aux cercles de centres O_a, O_b, O_c, forment un triangle A′B′C′.

1° Les triangles A′B′C′, $O_aO_bO_c$ ont même *centre des symédianes* ω.

2° Les droites $A'\omega$, $B'\omega$, $C'\omega$ passent respectivement par les milieux de BC, AC, AB.

Ce dernier théorème est attribué par M. Lemoine à M. Neuberg.

THÉORÈMES DE L'AUTEUR.

— La *symédiane* est conjuguée harmonique de la tangente au cercle circonscrit issue du même sommet, par rapport aux deux côtés adjacents.

Ce théorème se déduit de celui que nous avons donné aux *Exercices*, n° V (3e série, t. II, p. 463).

— AH, BH_1, CH_2 étant les trois hauteurs du triangle ABC, on abaisse du point H les perpendiculaires HP et HQ sur les côtés AB et AC, et des points H_1 et H_2 les perpendiculaires H_1S et H_2R sur BC. Les droites PR et QS se coupent sur la *symédiane* issue de A.

— Par les sommets A et B on élève des perpendiculaires au côté AB, par les sommets A et C des perpendiculaires au côté AC. Ces quatre droites forment un parallélogramme dont une diagonale passe par le point A. L'autre diagonale : 1° est perpendiculaire à la *symédiane* issue de A, 2° coupe le côté BC au même point que la tangente au cercle circonscrit menée par le point A.

Ce théorème, rapproché de l'antéprécédent et de celui que j'ai donné dans ma première Note au § 15, conduit à cette curieuse propriété de la parabole :

Si, par le point de rencontre T *de deux tangentes à une parabole, on élève des perpendiculaires à ces tangentes, les droites ainsi menées forment avec les normales correspondantes un parallélogramme, dont une diagonale passe par le point* T; *l'autre diagonale :*

1° *Passe par le foyer de la parabole,*

2° *Est perpendiculaire à la droite qui joint ce point au point* T.

Ce théorème, qui généralise une propriété bien connue

de la parabole (quand l'angle des tangentes est droit), n'a, je crois, jamais été donné; il fournit une construction très simple du foyer d'une parabole dont on connaît deux points quelconques et les tangentes en ces points.

Note additionnelle.

Depuis la rédaction de cette Note, j'ai reçu diverses autres communications, d'où il résulte qu'on a donné un très grand nombre de théorèmes relatifs au point que j'ai obtenu par la rencontre des symédianes, et qu'on définit dans les recherches dont je parle comme *le point dont la somme des carrés des distances aux trois côtés du triangle est minimum*. Je citerai parmi ces recherches celles de M. Brocard et de M. Neuberg, dont je ne connais que ce que m'en a appris une très gracieuse lettre de ce dernier; mais M. Neuberg m'a fait savoir qu'il se propose de réunir, dans un travail qui sera bientôt publié, toutes les propriétés connues de cet intéressant élément du triangle.

M. Tucker, de Londres, m'a fait aussi remarquer qu'un certain point qui joue un rôle dans une Note publiée par lui dans *the Quarterly Journal*, sous le titre *The triplicate-ratio circle*, se confond avec le centre des symédianes.

SUR UNE QUESTION DE CINÉMATIQUE;

Par M. L. JACOB,
Lieutenant d'Artillerie de Marine.

Je me permets de vous adresser la solution et l'énoncé d'une question qui s'est présentée à l'atelier de la compagnie d'ouvriers de Lorient et qui présente un certain intérêt au point de vue du mécanisme. Il me semble que cette question pourrait trouver une place comme exercice dans les *Nouvelles Annales*. En voici l'énoncé :

Une droite mobile D *de longueur constante glisse*

par l'une de ses extrémités sur un cercle S *et par l'autre sur un diamètre* Δ *de ce cercle : on demande de déterminer la nature des courbes* C *qui, étant liées invariablement à la droite* D, *enveloppent dans leur mouvement une circonférence.*

Soient I le centre instantané de rotation de la droite AB, E le centre de la circonférence enveloppée par la courbe cherchée. La droite IE est la normale commune à ces deux courbes au point de contact M.

Considérons le plan mobile déterminé par la droite AB

Fig. 1.

Fig. 2.

et mobile sur le plan de la circonférence fixe S. On peut facilement dans ce plan construire une position de la droite IE ; toutes les courbes cherchées enveloppant des circonférences de centre E seront les trajectoires orthogonales de ces droites.

Il suffit pour cela de mener, à partir du point B, une droite SB sur laquelle on prend

$$SB = a,$$

de joindre SA, de mener par S la droite SE faisant avec SA l'angle constant

$$ASE = \alpha,$$

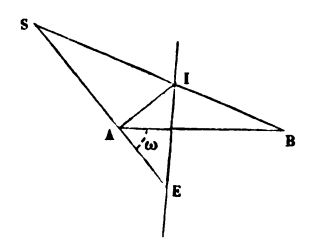
et de prendre sur SE une longueur constante

$$SE = c.$$

La question se réduit à trouver les trajectoires orthogonales de IE. Or je dis que cette droite est normale au lieu du point E.

En effet, si l'on considère l'angle constant ASE, le

Fig. 3.



point A est fixe, l'angle S se meut sur la circonférence de rayon SB et de centre B : donc le centre instantané de rotation est à l'intersection de la droite SB et de la perpendiculaire menée par le point A à SA. Cela posé, la longueur SE étant constante, la normale au lieu du point E est précisément IE.

Si l'on considère la courbe lieu du point E dans le mouvement du plan mobile sur le plan fixe, elle passera toujours par le point fixe E de ce plan.

Si l'on porte sur EI une longueur constante EM, le lieu du point M est une courbe parallèle au lieu du point E, qui enveloppera une circonférence de centre E et de rayon EM.

Un cas remarquable est celui où le point E est placé sur le diamètre fixe Δ. On essayera alors immédiatement un compas permettant de déterminer le lieu du point E.

L'équation de ce lieu est facile à trouver; on a

$$SB = a,\quad AB = b,\quad SE = c,\quad AE = \rho;$$

donc

$$(c-\rho)^2 + b^2 + 2b(c-\rho)\cos\omega = a^2.$$

On peut discuter aisément les formes diverses de cette courbe.

QUELQUES FORMULES RELATIVES A L'ÉQUATION COMPLÈTE DU TROISIÈME DEGRÉ;

PAR M. C. MARGERIE.

Soient l'équation

(1) $$a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3 = 0$$

et l'expression indicatrice

$$I = 4(a_1^2 - a_0a_2)(a_2^2 - a_1a_3) - (a_0a_3 - a_1a_2)^2,$$

dont la loi de formation est facile à retenir.

α. Si $I > 0$, l'équation a ses trois racines réelles.

Si $I < 0$, l'équation n'a qu'une racine réelle.

Si $I = 0$, deux cas se présentent : 1° les deux binômes $a_1^2 - a_0a_2$, $a_2^2 - a_1a_3$ ne sont pas nuls : l'équation a deux racines égales; 2° les deux binômes $a_1^2 - a_0a_2$ et $a_2^2 - a_1a_3$ sont nuls : l'équation a ses trois racines égales.

β. Si l'équation a ses racines réelles, les deux binômes $a_1^2 - a_0a_2$, $a_2^2 - a_1a_3$ sont positifs. C'est là une condition nécessaire. Si donc, en formant I, on reconnaît qu'un de ces deux binômes est négatif, ou que l'un seulement est nul, on peut abandonner le calcul et affirmer que l'équation n'a qu'une racine réelle.

γ. Si l'équation a *deux* racines égales, et si ses coefficients sont numériques et commensurables, les deux binômes $a_1^2 - a_0a_2$, $a_2^2 - a_1a_3$ sont carrés parfaits, et la

racine double de l'équation est

$$\pm\sqrt{\frac{a_2^2 - a_1 a_3}{a_1^2 - a_0 a_2}}.$$

Il faut prendre le signe de $a_0 a_3 - a_1 a_2$.

CALCUL A $\frac{1}{10^n}$ PRÈS DES RACINES INCOMMENSURABLES D'UNE ÉQUATION NUMÉRIQUE DONT TOUTES LES RACINES SONT RÉELLES;

Par M. C. MARGERIE.

1. *Calcul de la plus grande racine positive.* — Soit l'équation

$$f(x) = 0,$$

dont toutes les racines sont réelles.

Si λ_1 est la limite supérieure de ses racines positives calculée par la *méthode de Newton*, $\lambda_1 - 1$ est la partie entière α de la plus grande racine positive A.

L'équation

$$\varphi(y) = f(y + \alpha) = 0$$

n'a qu'une racine positive égale à $A - \alpha$, et la racine positive de l'équation

$$\psi(z) = \varphi\left(\frac{z}{10}\right) = 0$$

a pour partie entière le chiffre β des dixièmes de A écrite sous forme décimale. Si λ_2 est le plus petit nombre entier rendant $\psi(z)$ positif, $\beta = \lambda_2 - 1$.

L'équation

$$\chi(t) = \psi(z + \beta) = 0$$

n'a qu'une racine positive dont la partie entière est

nulle et dont le chiffre des dixièmes est le chiffre des centièmes γ de A.

γ sera donc le chiffre des unités simples de la racine positive de l'équation

$$\xi(u) = \chi\left(\frac{u}{10}\right) = 0$$

et s'obtiendra en diminuant de l'unité le plus petit nombre entier qui rend $\xi(u)$ positif.

On calculera ainsi successivement les chiffres des différentes unités décimales qui entrent dans A.

Remarque. — En prenant la partie entière de la racine positive de l'équation

$$\psi_1(z_1) = \varphi\left(\frac{z_1}{10^m}\right) = 0,$$

on aurait le nombre formé par l'ensemble des m premiers chiffres décimaux de A; mais, pratiquement, ce nombre serait difficile à trouver. Il faut opérer comme nous l'avons indiqué.

2. *Calcul de la plus petite racine positive.* — Si a est la plus petite racine positive de

$$f(x) = 0,$$

et A_1 la plus grande racine positive de

$$f_1(x_1) = f\left(\frac{1}{z_1}\right) = 0,$$

on a

$$a = \frac{1}{A_1},$$

et si l'on veut a avec p chiffres exacts, par défaut, on calculera A_1 avec $p+1$ chiffres exacts par excès.

3. *Calcul d'une racine positive quelconque.* — Soit ρ la plus petite racine de l'équation

$$f(x) = 0$$

supérieure au nombre positif p.

$\rho - p$ sera la plus petite racine positive de l'équation

$$\zeta(w) = f(w + p) = 0.$$

La connaissance de cette racine conduira à la valeur de ρ.

4. *Calcul des racines négatives.* — On calculera les racines positives de la transformée en $-x$, et l'on affectera les racines trouvées du signe $-$.

5. *Première application.* — Calcul à $\frac{1}{10^3}$ par défaut de la plus grande racine positive A de l'équation

$$f = x^3 - 5x^2 - 14x - 8 = 0.$$

α. *Recherche de la partie entière.*

$$\begin{aligned} f &= x^3 - 5x^2 - 14x - 8 && 8, \\ f' &= 3x^2 - 10x - 14 && 5, \\ f'' &= 2(3x - 5) && 2, \\ f''' &= 6. \end{aligned}$$

Partie entière : $8 - 1 = 7$.

β. *Recherche du chiffre des dixièmes.*

$$\varphi(y) = f(y + 7) = y^3 + 16y^2 + 63y - 8 = 0,$$

$$\varphi_1(z) = \varphi\left(\frac{z}{10}\right) = z^3 + 160z^2 + 6300z - 8000 = 0;$$

2 rend $\varphi_1(z)$ positif, donc le chiffre des dixièmes est 1.

γ. *Recherche du chiffre des centièmes.*

$$\psi(t) = \varphi_1(t+1) = t^3 + 163t^2 + 6623t - 1539 = 0,$$

$$\psi_1(u) = \psi\left(\frac{u}{10}\right) = u^3 + 1630u^2 + 662300u - 1539000 = 0.$$

3 rend $\psi_1(u)$ positif, donc le chiffre des centièmes est 2.

δ. *Recherche du chiffre des millièmes.*

$$\chi(v) = \psi_1(v+2) = v^3 + 3266v^2 + 668832v - 207872 = 0,$$

$$\chi_1(w) = \chi\left(\frac{w}{10}\right)$$
$$= w^3 + 32660w^2 + 66883200w - 207872000 = 0.$$

4 rend $\chi_1(w)$ positif, donc le chiffre des millièmes est 3.

La racine cherchée a pour valeur 7,123 à $\frac{1}{10^3}$ par défaut.

6. *Seconde application.* — L'équation

$$f = x^4 - 7x^3 + 13x^2 - 3x - 4 = 0$$

a une racine ρ comprise entre 2 et 3, calculer cette racine à $\frac{1}{100}$ près par défaut.

$$\varphi(y) = f(y+2) = y^4 + y^3 - 5y^2 - 3y + 2 = 0,$$

$$\psi(z) = \varphi\left(\frac{1}{z}\right) = 2z^4 - 3z^3 - 5z^2 + z + 1 = 0;$$

si a est la plus grande racine de $\psi(z)$,

$$\rho = 2 + \frac{1}{a}.$$

Il faut calculer a avec trois chiffres exacts, par excès.

α. *Calcul de la partie entière de a.*

$$\psi = 2z^4 - 3z^3 - 5z^2 + z + 1 \qquad 3,$$
$$\psi' = 8z^3 - 9z^2 - 10z + 1 \qquad 2,$$
$$\psi'' = 2(12z^2 - 9z - 5) \qquad 2,$$
$$\psi''' = 6(8z - 3) \qquad 1.$$

La partie entière de a est 3 — 1 ou 2.

β. *Calcul du chiffre des dixièmes de a.*

$$\chi(t) = \psi(t+2) = 2t^4 + 13t^3 + 25t^2 + 9t - 9 = 0,$$

$$\chi_1(u) = \chi\left(\frac{u}{10}\right) = 2u^4 + 130u^3 + 2500u^2 + 9000u - 90000 = 0.$$

5 rend $\chi_1(u)$ positif, le chiffre des dixièmes de a est 4.

γ. *Calcul du chiffre des centièmes de a.*

$$\xi(v) = \chi_1(v+4) = 2v^4 + 162v^3 + 4252v^2 + 35752v - 5168 = 0,$$

$$\xi_1(w) = \xi\left(\frac{w}{10}\right) = 2w^4 + 1620w^3 + 425200w^2 + 35752000w - 5168000 = 0;$$

2 rend $\xi_1(w)$ positif, donc 2 est le chiffre des centièmes de a, par excès.

$$\rho = 2 + \frac{1}{2,42} = 2,41.$$

APPLICATION DE LA STATIQUE AU CALCUL DE DIVERS ÉLÉMENTS D'UN TRIANGLE;

PAR M. A. DE SAINT-GERMAIN.

On sait que, si la Mécanique doit beaucoup à la Géométrie, elle n'est pas sans lui rendre quelques services en fournissant, pour des propositions de Géométrie pure, des démonstrations simples et remarquables, au moins au point de vue philosophique; j'en veux signaler un nouvel exemple en montrant avec quelle facilité un théorème de Statique, dont on donne peu d'applications élémentaires, permet de calculer les distances de divers points remarquables d'un triangle; quelques-unes de ces distances sont données par M. Dostor dans les *Nouvelles Annales*, août 1883, comme résultant de considé-

rations géométriques. Le théorème dont il s'agit est le suivant :

Soient A, B, C, ..., F *et* T *les points d'application de forces parallèles* α, β, γ, ..., φ *et de leur résultante* τ; P *un point quelconque pris pour origine; on a*

$$\text{(1)}\qquad \overline{PT}^2 = \frac{1}{\tau}\Sigma\alpha\overline{PA}^2 - \frac{1}{\tau^2}\Sigma\alpha\beta\,\overline{AB}^2.$$

Supposons que les forces considérées soient au nombre de trois, appliquées aux sommets d'un triangle ABC; désignons par G et H les points de concours des médianes et des hauteurs, par O, I, I_a, I_b, I_c les centres des cercles circonscrit, inscrit et exinscrits, par R, r, r_a, r_b, r_c les rayons des mêmes cercles, enfin par M le milieu du côté BC. Faisons d'abord $\alpha = \beta = \gamma = 1$; la résultante, $\tau = 3$, sera appliquée en G. Si nous plaçons l'origine P en O, OA, OB, OC seront égaux à R et l'équation (1) donnera

$$\overline{OG}^2 = \frac{1}{3}\times 3R^2 - \frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2) = R^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{9}.$$

Pour calculer HG, il suffirait de placer l'origine P en H et de connaître AH, BH, CH; or, si par chaque sommet de ABC je mène une parallèle au côté opposé, je forme un triangle semblable à ABC, le rapport de similitude étant 2, et AH l'homologue de MO : on aura donc $AH = 2MO = \sqrt{4R^2 - a^2}$. L'équation (1) donne alors pour HG une valeur double de OG, ce qui résulte aussi de la similitude des triangles AHG, MOG.

Faisons coïncider l'origine avec le centre I du cercle inscrit : on a

$$\overline{IA}^2 = \frac{r^2}{\sin^2\frac{1}{2}A} = \frac{p-a}{p}bc;$$

l'équation (1) donne, en remarquant que $abc = 4Rrp$,

$$\overline{GI}^2 = \frac{bc(p-a)+\ldots}{3p} - \frac{a^2+b^2+c^2}{9}$$
$$= \frac{bc+ca+ab}{3} - \frac{a^2+b^2+c^2}{9} - 4Rr.$$

On reconnaît aisément que GI_a se déduit de XGI en y changeant a en $-a$, r en $-r_a$.

Faisons maintenant les forces α, β, γ égales respectivement à a, b, c; leur résultante $a+b+c$ est, on le sait, appliquée en I; si nous prenons le point O pour origine, l'équation (1) nous donnera

$$\overline{OI}^2 = \frac{R^2a+R^2b+R^2c}{a+b+c} - \frac{bca^2+\ldots}{(a+b+c)^2}$$
$$= R^2 - \frac{abc}{a+b+c} = R^2 - 2Rr,$$

formule connue, mais très remarquable en ce qu'elle prouve que, deux cercles étant donnés, il n'est pas possible en général de construire un triangle inscrit dans l'un et circonscrit à l'autre. On aurait semblablement

$$\overline{OI_a}^2 = R^2 + 2Rr_a.$$

Supposons enfin $\alpha = a^2$, $\beta = b^2$, $\gamma = c^2$; le centre des forces parallèles est en S, au point de concours des droites que M. d'Ocagne étudie sous le nom de *symédianes* dans le numéro d'octobre 1883 des *Nouvelles Annales*. Cherchons d'abord la distance SA; si l'on fait coïncider l'origine avec le point A, l'équation (1) donne

$$\overline{SA}^2 = \frac{2b^2c^2}{a^2+b^2+c^2} - \frac{3a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}$$
$$= \frac{(2b^2+2c^2-a^2)b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2} = \frac{b^2c^2\overline{AG}^2}{(a^2+b^2+c^2)^2};$$

la règle de composition des forces parallèles montre que

la symédiane a pour longueur

$$\frac{bc}{b^2+c^2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}.$$

L'équation (1) donnerait les distances SO, SG, ...,

$$\overline{SO}^2 = R^2 - \frac{3a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2},$$

$$\overline{SG}^2 = \frac{2}{3}\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}r^2 + \frac{a^2+b^2+c^2}{18} - \frac{3a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}.$$

Une marche toute semblable permettra de calculer la distance de deux points remarquables d'un tétraèdre, pourvu qu'on connaisse les distances de l'un d'eux aux quatre sommets et qu'on puisse regarder l'autre comme le centre de quatre forces parallèles connues appliquées aux mêmes sommets.

SUR L'ANGLE DES LITS OBLIQUE ET NORMAL DE LA VIS SAINT-GILLES;

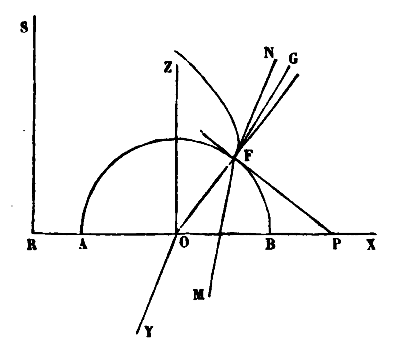
PAR M. ERNEST LEBON.

1. Les appareilleurs emploient, comme génératrices des lits de la vis Saint-Gilles ronde, des rayons d'une des demi-circonférences méridiennes de l'intrados; mais les lits ainsi obtenus sont obliques à l'intrados.

Soient RS (*fig.* 1) l'axe d'une vis Saint-Gilles, SRX un plan méridien, AFB une demi-circonférence méridienne de l'intrados, O le centre de AFB. On sait que tout point F de AFB engendre une hélice dont la tangente FM en F est dans un plan perpendiculaire à OX. Le lieu des normales à l'intrados, telles que FN, aux divers points d'une hélice, est une surface normale à

l'intrados. Soit FG l'intersection du plan RSX et du plan tangent en F à cette surface normale : Jules de la Gournerie, dans son Cours à l'École Polytechnique, a proposé,

Fig. 1.



pour lits de la vis Saint-Gilles ronde, les surfaces de vis à filets triangulaires normales à l'intrados, engendrées par des droites analogues à FG; son successeur, M. A. Mannheim, a adopté ce genre de lits normaux.

La valeur φ de l'angle des deux espèces de lits en chaque point d'une méridienne n'a pas encore été donnée; cherchons cette valeur.

2. Prenons trois axes rectangulaires OX, OY et OZ, le dernier étant vertical. Soient x, y et z les coordonnées de F, a le rayon RA du noyau, r le rayon de AFB, ρ le rayon du cylindre de foulée, g le giron, h la hauteur d'une marche, α l'angle de FM et de OY. On a

$$\tang\alpha = \frac{m}{a+r+x},$$

en posant

(1) $$m = \frac{h\rho}{g}.$$

Par suite, les équations de FM sont

$$X - x = 0, \quad mY - (a+r+x)(Z-z) = 0.$$

L'équation du plan tangent OFM en F au lit oblique est

$$(a+r+x)zX + mxY - (a+r+x)xZ = 0.$$

Les équations de la normale FN sont celle du plan

$$zX - xZ = 0,$$

perpendiculaire en F à FM ([1]) et celle du plan

$$(a+r+x)(Y-y) + m(Z-z) = 0,$$

perpendiculaire en F à la tangente FP à AFB.

L'angle φ est égal à l'angle de FN et du plan tangent en F au lit oblique. On trouve

$$(2) \qquad \operatorname{tang}\varphi = \frac{m^2 x\sqrt{r^2 - x^2}}{r^2(a+r+x)\sqrt{m^2 + (a+r+x)^2}}.$$

3. On voit aisément que x ne peut varier qu'entre $-r$ et r; et que l'angle aigu φ égale $0°$, quand x égale $-r$, 0 ou r. Donc *les deux espèces de lits coïncident à la naissance et à la clef.*

On a

$$(3) \qquad \frac{d\operatorname{tang}\varphi}{dx} = -\frac{m^2 N}{r^2 D},$$

en posant

$$N = (a+r)(2x^2 - r^2)[m^2 + (a+r+x)^2] + x[m^2x^2 + r^2(a+r+x)^2]$$

et

$$D = (a+r+x)^2(x^2 - r^2)^{\frac{1}{2}}[m^2 + (a+r+x)^2]^{\frac{2}{3}}.$$

Le dénominateur de cette dérivée est positif, quand x varie de $-r$ à r.

([1]) D'après cette équation, on conclut que *les normales à l'intrados, aux divers points d'une méridienne, coupent la perpendiculaire menée par son centre à son plan.*

En faisant x successivement égal à

$$-r, \quad x'', \quad -\frac{r}{\sqrt{2}}, \quad 0, \quad x', \quad \frac{r}{\sqrt{2}}, \quad r,$$

x' et x'' étant les racines de l'équation

$$2(a+x)x^2 + r^2x - (a+r)r^2 = 0,$$

on trouve que N prend les signes

$$+, \quad +, \quad -, \quad -, \quad -, \quad +, \quad +.$$

D'après cela, l'équation

$$(4)\left\{\begin{array}{l} 2(a+r)x^4 + [m^2 + r^2 + 4(a+r)^2]x^3 \\ \quad + (a+r)[2m^2 + r^2 + 2(a+r)^2]x^2 \\ \quad - (a+r)^2 r^2 x - (a+r)[m^2 + (a+r)^2]r^2 = 0, \end{array}\right.$$

obtenue en égalant N à 0, admet une racine positive x_1, comprise entre x' et $\frac{1}{2}r\sqrt{2}$, et une racine négative x_2, comprise entre x'' et $-\frac{1}{2}r\sqrt{2}$.

D'après le théorème de Descartes, les deux racines de l'équation (4) sont négatives, si elles sont réelles. Je dis que chacune d'elles est inférieure à $-r$. En effet, si l'une d'elles x_3 était supérieure à $-r$, l'autre x_4 le serait aussi. Alors, après avoir posé

$$x_1 = x' + k_1, \quad x_2 = x'' + k_2, \quad x_3 + x_4 = -2r + l,$$

on trouverait que la somme des quantités k_1, k_2 et l, ici supposées positives, est négative.

D'après ce qui précède, et en tenant compte des signes de la dérivée (3), on trouve que l'angle aigu φ a deux valeurs maxima φ_1 et φ_2 qui correspondent à des valeurs x_1 et x_2 de x comprises entre $\frac{1}{2}r\sqrt{2}$ et x''. Par suite, on voit, dans la pratique, si l'on peut, sans inconvénient pour la stabilité, adopter les lits obliques, ou si l'on doit employer les lits normaux.

4. *Exemple.* — Soient

$$a = 0^m,25, \quad r = 0^m,5, \quad \rho = 0^m,75, \quad 2g = 3h.$$

Les équations (4) et (2) donnent

$$x_1 = 0^m,288 \quad \text{et} \quad x_2 = -0^m,428,$$

à 0,001 près par défaut ;

$$\varphi_1 = 5^\circ 37' \quad \text{et} \quad \varphi_2 = 29^\circ 58'.$$

5. Cherchons l'angle Φ d'une génératrice OF d'un lit oblique et d'une génératrice FG d'un lit normal.

Les équations de OF étant

$$Y = 0, \quad zX - xZ = 0,$$

et celles de FG étant

$$Y = 0,$$

$$[m^2 + (a + r + x)^2] z(X - x) - (a + r + x)^2 xZ - m^2 zx = 0,$$

on obtient

$$\operatorname{tang} \Phi = \frac{m^2 x \sqrt{r^2 - x^2}}{m^2(r^2 - x^2) + r^2(a + r + x)^2}.$$

La discussion de cette équation montre que l'angle aigu Φ, qui égale 0° quand x égale $-r$, 0 ou r, a deux valeurs maxima Φ_1 et Φ_2 qui correspondent à des valeurs x'_1 et x'_2 de x comprises entre r et $-r$. L'équation

$$2(a + r)x^3 + [m^2 + r^2 + 2(a + r)^2]x^2 - [m^2 + (a + r)^2]r^2 = 0$$

donne x'_1 et x'_2.

Dans l'exemple considéré, on trouve

$$x'_1 = 0^m,31, \quad x'_2 = -0^m,47, \quad \Phi_1 = 5^\circ 26', \quad \Phi_2 = 36^\circ 43'.$$

Sur notre épure (*fig.* 2), qui contient les constructions

du Cours de l'École Polytechnique, pour obtenir la géné-

Fig. 2.

ration $q'f'g'$, les points de $a'f'b'$ auxquels correspondent les angles Φ_1 et Φ_2 sont f' et f'_2.

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une Lettre de M. le Dr J. Peano. — Dans son *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique,* p. 21, M. Jordan donne une démonstration peu rigoureuse du théorème suivant :

« Soit $y = f(x)$ une fonction de x dont la dérivée reste finie et déterminée lorsque x varie dans un certain intervalle.

» Soient a et $a + h$ deux valeurs de x prises dans cet intervalle. On aura

$$f(a+h) - f(a) = \mu h,$$

μ désignant une quantité intermédiaire entre la plus grande et la plus petite valeur de $f'(x)$ dans l'intervalle de a à $a+h$. »

En effet, dit l'auteur, donnons à x une série de valeurs $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ intermédiaires entre a et $a+h$; posons

$$f(a_r)-f(a_{r-1})=(a_r-a_{r-1})[f'(a_{r-1})+\varepsilon_r].$$

Supposons maintenant les valeurs intermédiaires $a_1, \ldots, a_{n-1}$ indéfiniment multipliées (et rapprochées). Les quantités $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ tendront toutes vers zéro, car ε_r est la différence entre $\frac{f(a_r)-f(a_{r-1})}{a_r-a_{r-1}}$ et sa limite $f'(a_{r-1})$.

Cette affirmation n'est pas juste; car

$$f'(a_{r-1})=\lim.\frac{f(a_r)-f(a_{r-1})}{a_r-a_{r-1}}$$

quand on suppose a_{r-1} fixe, et a_r variable et s'approchant indéfiniment de a_{r-1}; mais on ne le peut pas affirmer quand varient en même temps a_r et a_{r-1}, si l'on ne suppose pas que la dérivée soit continue.

Ainsi, par exemple, posons

$$y=f(x)=x^2\sin\frac{1}{x},$$

avec

$$f(0)=0;$$

sa dérivée

$$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$$

pour $x \gtrless 0$, et $f'(0)=0$, reste toujours finie et déterminée, mais discontinue.

Soit

$$a=0,\quad h>0;$$

posons

$$a_1=\frac{1}{2n\pi},\quad a_2=\frac{1}{(2n+1)\pi},$$

$a_3, a_4, \ldots$ quelconques.

On aura

$$\varepsilon_2 = \frac{f(a_2) - f(a_1)}{a_2 - a_1} - f'(a_1);$$

mais

$$f(a_1) = 0, \quad f(a_2) = 0, \quad f'(a_1) = -1;$$

donc

$$\varepsilon_2 = 1,$$

et sa limite n'est pas zéro.

Presque la même faute a été commise par M. Hoüel (*Cours de Calcul infinitésimal*, t. I, p. 145). J'ajouterai enfin que l'on démontre très facilement la formule

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = h f'(x_0 + \theta h),$$

sans supposer la continuité de la dérivée.

Extrait d'une Lettre de M. C. Jordan. — Je n'ai rien à répondre à la critique de M. le Dr Peano, qui est parfaitement fondée. J'ai admis implicitement dans ma démonstration que $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ tendait *uniformément* vers $f'(x)$ dans l'intervalle de a à b. C'est un des points sur lesquels je me proposais d'ailleurs de revenir dans mon troisième Volume.

M. Peano dit qu'il est facile de démontrer la formule

$$f(x+h) - f(x) = h f'(x + \theta h),$$

sans supposer la continuité de la dérivée. Il me ferait plaisir en me communiquant sa démonstration, car je n'en connais pas qui me paraisse pleinement satisfaisante.

Extrait d'une Lettre de M. G. Kœnigs. — Il y a deux ans, lorsque je vous envoyai la Note sur les cubiques qui vient de paraître dans le numéro de juillet des *Annales*, je n'avais pas cherché si le complexe des tangentes aux cubiques gauches passant par cinq points

était bien le seul qu'on pût définir par des points de départ, de telle sorte que le cône de Malus contînt cinq points fixes. En lisant l'article, j'ai tout de suite pensé à cette réciproque, et voici, en quelques mots, comment je l'établis. Une transformation homographique permet toujours de rejeter trois points fixes à l'infini suivant trois directions rectangulaires, Ox, Oy, Oz; de plus, je puis prendre pour origine O des coordonnées le milieu de la droite qui joint les deux autres points, qui ont ainsi pour coordonnées (a, b, c), $(-a, -b, -c)$.

En cherchant d'abord à définir les cosinus directeurs X, Y, Z d'une droite en fonction du point de départ (x, y, z), de sorte que le cône de Malus passe par les points fixés à l'infini, c'est-à-dire contienne les trois parallèles aux axes menées par son sommet, on trouve que l'on doit avoir

$$\frac{X}{f(x)} = \frac{Y}{\varphi(y)} = \frac{Z}{\psi(z)},$$

où f, φ et ψ sont des fonctions arbitraires.

Si l'on exprime ensuite que le cône contient les deux autres points (a, b, c), $(-a, -b, -c)$, on tombe sur deux autres équations qui déterminent *complètement* les fonctions f, φ, ψ, et l'on vérifie que les valeurs de X, Y, Z conviennent à la tangente au point (x, y, z) à la cubique gauche passant par ce point, ainsi que par les autres cinq points fixes.

Le complexe du sixième ordre que j'ai défini dans la Note précitée est donc le seul qui jouisse de la propriété que je lui avais reconnue directement.

Si l'on aborde la question sans prendre la précaution de rejeter trois des points à l'infini, on tombe sur un système de six équations linéaires entre trois fonctions de trois variables indépendantes, et il ne paraît pas aisé de découvrir que ce système surabondant comporte ce-

pendant une solution unique et dénuée de constantes arbitraires.

Extrait d'une Lettre de M. d'Ocagne. — Par application de la formule

$$\delta = \psi'(x)\rho\cos\alpha,$$

que j'ai donnée dans une Note récente (3e série, t. II, p. 190), on a ce théorème :

Soit donné un cercle rapporté à deux axes rectangulaires passant par son centre; si sur la tangente en chaque point on porte une longueur égale à l'x de ce point, la normale à la courbe ainsi obtenue coupe le rayon du cercle à une distance du centre égale à l'y du point.

BIBLIOGRAPHIE.

Théorie de la capillarité; par M. *Émile Mathieu*, professeur à la Faculté des Sciences de Nancy. In-4°. Paris, Gauthier-Villars; 1883. Prix : 10 francs.

Laplace publia le premier, en 1806, une véritable théorie mathématique de la capillarité, qui est insérée à la suite du tome IV de la *Mécanique céleste*. Il prit pour point de départ de ses recherches le principe de l'attraction du liquide sur lui-même et de la paroi sur le liquide, en supposant que ces actions n'ont lieu qu'à des distances insensibles.

Gauss s'occupa plus tard des principes de la même théorie, dans un Mémoire inséré dans le tome V de ses Œuvres.

Enfin Poisson fit paraître, en 1831, sa *Nouvelle théorie de l'action capillaire*. Dans cet Ouvrage, d'une lecture très difficile, il montre qu'il est indispensable d'avoir égard au chan-

gement de densité du liquide vers les surfaces qui le terminent.

Non seulement le livre de M. Mathieu renferme tous les résultats contenus dans les Ouvrages précédents, mais il tient compte des expériences qui ont été faites sur ce sujet depuis quarante ans et qui ont fourni de nouveaux éléments à la théorie.

Bien qu'il admette, comme Poisson, le changement de densité vers la limite du liquide, cette considération ne l'oblige pas à des calculs très compliqués, comme on le voit dans le Chapitre I de son livre, où il établit les principes de la théorie de la capillarité.

Le Chapitre II traite de l'élévation ou de la dépression d'un liquide auprès d'une paroi.

Le Chapitre III est intitulé : Liquides superposés; suspension dans l'air d'un liquide par un tube capillaire.

Parmi les questions traitées dans ce Chapitre, nous signalerons : 1° l'étude des figures liquides obtenues par Plateau quand elles sont soustraites à la pesanteur, et celle de la stabilité de leur équilibre; 2° l'effet de la viscosité dans l'état d'équilibre d'un liquide.

Le Chapitre IV a pour sujet la modification de la pression hydrostatique par les forces capillaires. Il correspond au Chapitre V du Livre de Poisson; mais autant ce dernier Chapitre est difficile à lire, autant les démonstrations synthétiques données par M. Mathieu sont faciles à comprendre. Le même sujet est ensuite repris par l'Analyse.

Le Chapitre V est intitulé : Élévation d'un liquide au moyen d'un disque horizontal; figures des gouttes de liquide posées sur un plan horizontal ou suspendues.

Citons les questions suivantes qui y sont traitées : des figures des gouttes de mercure, supposées d'abord grandes, ensuite petites ou moyennes; calcul de la dépression barométrique; détermination toute nouvelle des figures des gouttes au moment où elles sont près de se détacher d'un tube capillaire et conséquences qui s'en déduisent.

Histoire des sciences mathématiques et physiques; par M. *Maximilien Marie,* examinateur d'admission à l'École Polytechnique. Petit in-8°, caractères elzevirs, titre en deux couleurs. Tomes I, II, III et IV. Paris, Gauthier-Villars; 1883-1884. Prix de chaque tome : 6 francs.

I.

On raconte que Walter Raleigh avait, pendant son séjour forcé à la Tour de Londres, entrepris d'écrire une Histoire universelle. Interrompu un jour par le bruit d'une querelle, il appelle, s'enquiert, interroge; puis, ne pouvant, à travers les témoignages contradictoires des assistants, arriver à démêler le vrai motif de tout ce tapage, il jette dédaigneusement son manuscrit au feu, abjurant la prétention de dire, sur les faits lointains, la vérité qui lui échappe sur une rixe dont les bruyants ébats sont parvenus jusqu'à son oreille.

Raleigh était logique, s'il avait eu la chimérique ambition de remonter dans son Histoire jusqu'aux causes premières des événements et de retracer les détails précis de leur mode d'exécution. Mais tel n'est pas l'objet de l'Histoire générale; son domaine exclusif est le côté lumineux des événements, c'est-à-dire leur existence et leur résultat, la manière dont ils s'enchaînent et dont ils s'engendrent. Tous les événements de l'Histoire, qu'ils appartiennent à l'ordre scientifique ou à la vie politique, offrent ce double caractère d'être plongés d'un côté dans l'obscurité et de l'autre en pleine lumière. On a, par exemple, longtemps discuté sur les origines du Calcul différentiel; les avis peuvent même différer encore sur la part de Leibnitz et sur celle de Newton; mais tout le monde ne s'accorde pas moins à reconnaître que, vers la fin du XVIIe siècle, les efforts simultanés de ces deux génies immortels ont créé un nouveau calcul dont l'avènement a été l'occasion des applications les plus surprenantes et les plus variées, et a constitué le plus grand progrès qu'aient jamais fait les Sciences mathématiques. L'éclosion d'une idée nouvelle, les détails de sa formation sont donc choses obscures et discutables à l'infini; mais les traits principaux, les grandes lignes de son développement échappent au contraire à l'incertitude, et c'est une tâche difficile, mais non insurmontable, que de reproduire, sans

en fausser les couleurs, le tableau des plus éclatantes conquêtes de l'esprit humain.

C'est bien en se plaçant à ce point de vue que M. Marie a écrit son Livre : « Il ne faut chercher », dit-il, « dans cet Ou- » vrage ni tentatives de restitution de faits inconnus, ni dis- » cussions sur les faits incertains.... L'Histoire que j'ai désiré » écrire est celle de la filiation des idées et des méthodes » scientifiques. » La lecture seule du premier volume permettait d'augurer que M. Marie avait atteint son but, mais nous avons préféré attendre, pour pouvoir affirmer le succès déjà prévu, que la publication fût plus avancée. Aujourd'hui quatre volumes ont paru de cet important Ouvrage; ils embrassent la longue période comprise entre Thalès et Huygens et renferment par conséquent la partie la plus intéressante et la plus difficile de l'Histoire des Sciences, c'est-à-dire celle où se produit le laborieux enfantement des premiers Chapitres de la Géométrie, de l'Astronomie, de l'Algèbre, de la Physique, de la Mécanique, de la Chimie et de la Physiologie: il n'est donc pas téméraire de préjuger de l'œuvre entière par ces quatre premiers Volumes.

II.

Les devanciers de M. Marie, Montucla, Bossut, etc., nous ont donné les noms des savants illustres, les dates et les titres de leurs Ouvrages; mais ils ont complètement omis, il faut l'avouer, de nous faire connaître, même aussi succinctement qu'on puisse l'imaginer, les méthodes suivies par les inventeurs. Considérons, par exemple, la période qui s'étend de Cavalieri à Huygens. Nous trouvons simplement dans l'*Aperçu historique :* « La méthode des indivisibles a suppléé » pendant cinquante ans à l'invention du Calcul intégral. » Montucla, de son côté, se borne à dire que Cavalieri considérait les lignes comme composées de points, les surfaces comme formées de lignes et les volumes comme résultant de feuilles empilées. Mais comment cette conception fut-elle mise en œuvre d'abord par le premier inventeur, puis par Roberval, Wallis et Pascal? Montucla, Bossut, Chasles restent muets sur ce sujet.

Toutes les Histoires nous apprennent que Roberval a quarré la cycloïde entière et cubé les volumes qu'elle engendre en tournant autour de sa base ou de la tangente au sommet, mais que Pascal le premier a évalué les aires des segments de cette courbe, ainsi que les volumes engendrés par la rotation de ces segments. Certes, entre les deux cas, la différence est grande

et Montucla en convient. Mais ce qu'il importerait de montrer, c'est combien éloignées l'une de l'autre sont les méthodes qui permettent de les aborder.

Pour répondre avec précision à toutes les questions de ce genre, qui sont assurément les plus intéressantes, M. Marie s'est livré, pendant de longues années, à un véritable travail de bénédictin. Ne s'arrachant à ses livres, dans son charmant cottage de Chatillon, que pour cultiver un moment ses fleurs, il a dépouillé, avec une sagacité peu commune, les ouvrages originaux, et il nous en donne une analyse rigoureuse en se plaçant au point de vue même des auteurs, reproduisant *in extenso* les propositions fondamentales avec leurs démonstrations et indiquant rapidement le moyen d'en déduire les autres. C'est là, il faut le reconnaître, un service inappréciable rendu aux savants qui pourront ainsi, sans peine aucune, entrer en commerce intime avec les plus grands esprits de l'antiquité et des temps modernes.

Quel professeur n'a désiré connaître exactement les Œuvres d'Archimède, d'Euclide, d'Apollonius, de Ptolémée, de Diophante, de Pappus, de Copernic, de Cardan, de Viète, de Galilée, de Kepler, de Descartes, de Wallis, de Roberval, de Pascal, d'Huygens, de Newton, de Leibnitz, de Bernoulli, etc.? Mais comment déchiffrer tous ces Ouvrages? Sans doute Archimède et Euclide ont été fort bien traduits en français par Peyrard; mais, pour lire Peyrard, il faut en quelque sorte le traduire à son tour, en retrancher les trois quarts, et jeter pas mal de lumière sur le reste. Les Ouvrages d'Apollonius, de Ptolémée, de Diophante et de Pappus ont été traduits en langue latine; ceux de Copernic, de Cardan, de Kepler ont été écrits en latin par leurs auteurs eux-mêmes. Mais quel latin obscur! Viète parle à la fois latin et grec dans la même phrase. Les Traités de Galilée relatifs à la Mécanique sont en italien et n'ont pas été traduits. Descartes a écrit, il est vrai, en français, la Géométrie, la Dioptrique et les Météores; mais quel laconisme et que de commentaires exige le développement de sa pensée? Enfin quelle persévérance ne faut-il pas pour supporter sans lassitude les bizarreries de Cavalieri et la lourdeur de Roberval, pour s'accoutumer à la manière étrange de Wallis, qui ne s'appuie guère que sur des analogies. Pascal lui-même, malgré sa belle langue, a besoin d'être traduit, la plupart des expressions qu'il emploie n'ayant plus cours dans la Science moderne.

Il est inutile d'insister davantage sur l'étendue et l'utilité de l'œuvre de M. Marie; mais ce que nous tenons à constater, c'est l'habileté avec laquelle il a triomphé des difficultés de sa tâche, c'est l'agrément que nous a procuré la lecture de ce Livre qui est d'une si merveilleuse clarté. Et cependant, qu'on ne s'y trompe pas, ses analyses des Œuvres des grands géomètres ne sont pas de simples esquisses à l'usage des personnes qui ne veulent avoir qu'un aperçu de l'Histoire de la Science : ce sont des études profondes qui offriront un réel secours même aux personnes désireuses d'entreprendre la lecture des Ouvrages originaux. Voici, par exemple, comment M. Marie résume la solution donnée par Archimède du problème de l'équilibre d'un segment de paraboloïde flottant sur un liquide.

« Soient (*fig.* 14)

BAC la section du segment de conoïde par le plan vertical mené par l'axe AO;

h la hauteur AO du segment;

B'A'C' la partie plongée ;

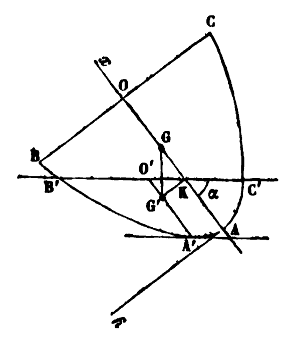
h' l'axe A'O' de cette partie;

α l'angle que l'axe AO fait avec l'horizon, dans la position d'équilibre;

p le paramètre de la parabole ;

G et G' les centres de gravité du segment entier et du segment plongé dans le liquide;

A*y* la tangente en A à la parabole de section BAC.



» Il faut exprimer que GG' fait avec A*y* l'angle α, qui est
» aussi l'angle de la tangente en A' à la parabole BAC avec
» l'axe AO*x*.

» Soient a et b les distances du point A′ aux droites Ax » et Ay; les distances des points G et G′ aux mêmes droites » sont respectivement $\frac{2}{3}h$ et o pour le premier, $a+\frac{2}{3}h'$ et b » pour le second. Par conséquent

$$GK = a - \tfrac{2}{3}(h-h')$$

» et

$$G'K = b;$$

» la raison qui détermine l'angle α (c'est tangα) est donc

$$\frac{a-\frac{2}{3}(h-h')}{b};$$

» mais cette raison est aussi $\frac{p}{b}$; et d'ailleurs

$$a = \frac{b^2}{2p}.$$

» En conséquence, il vient, en appelant K la raison cherchée » (tangα),

$$\frac{\frac{3}{2}(h-h')-\frac{p}{2K^2}}{\frac{p}{K}} = K;$$

» d'où

$$p = \tfrac{2}{3}(h-h') - \frac{p}{2K^2}.$$

» D'un autre côté, les volumes du segment entier et de la » partie plongée sont

$$\pi p h^2 \text{ et } \pi p h'^2;$$

» en désignant donc par P et P′ les poids d'un égal volume » du fluide et du segment de conoïde, on doit avoir

$$\frac{h^2}{h'^2} = \frac{P}{P'};$$

» d'où

$$h' = h\sqrt{\frac{P'}{P}};$$

» la condition d'équilibre est donc

$$p = \tfrac{2}{3}h\left(1-\sqrt{\frac{P'}{P}}\right) - \frac{p}{2K^2};$$

» d'où

$$K = \tan g\alpha = \frac{p}{\sqrt{2p\left[\frac{2}{3}h\left(1-\sqrt{\frac{P'}{P}}\right)-p\right]}}.$$

» Pour que l'équilibre soit possible, sans que l'axe soit ver-
» tical, il faut que

$$h > \frac{\frac{3}{2}p}{1-\sqrt{\frac{P'}{P}}}.$$

» On retrouve dans cette formule la condition énoncée dans » la proposition II. En effet, si $\frac{P'}{P}$ était infiniment petit, il » faudrait absolument que h dépassât $\frac{3}{2}p$.

» La condition de réalité tang α, exprimée par rapport à $\frac{P'}{P}$, » donne

$$\frac{P'}{P} < \frac{(h-\frac{3}{2}p)^2}{h^2}.$$

» C'est ce qu'exprime l'énoncé de la proposition IV : si le seg- » ment de conoïde a son axe plus grand que trois fois la moitié » du demi-paramètre ($2p$), et si la raison de la pesanteur de » ce segment à la pesanteur d'un volume égal du fluide n'est » pas moindre que la raison du carré de l'excès de l'axe sur » trois fois la moitié du demi-paramètre, au carré de l'axe, » l'équilibre sera impossible avec une direction inclinée de » l'axe. »

Le cas où la base du segment est entièrement plongée dans le liquide est traité d'une manière analogue.

III.

Ce serait méconnaître le caractère de l'Ouvrage qui nous occupe si l'on concluait de ce qui précède que l'auteur n'a visé qu'à donner une compilation pouvant, jusqu'à un certain point, tenir lieu des écrits originaux. M. Marie est au contraire dirigé dans ses jugements par des vues personnelles très nettes qui établissent un lien étroit entre les diverses parties de son œuvre et donnent à son livre une unité remarquable et un attrait particulier.

C'est surtout la création laborieuse de l'Algèbre que M. Marie éclaire à l'aide d'une théorie qui lui est propre.

L'Algèbre est la théorie abstraite des lois, c'est-à-dire des relations de dépendance entre des grandeurs susceptibles de varier simultanément : elle a pour objet, dans ses développements ultérieurs, l'étude des transformations qu'on peut faire subir aux expressions de ces lois sans les altérer; mais les premiers efforts, et les plus pénibles, ont dû porter sur les moyens d'exprimer ces lois sous la forme que leur attribuaient d'abord les recherches concrètes. Or le point de vue où nous nous trouvons placés, depuis l'invasion en Occident des méthodes des Hindous et des Arabes, devait nous faire complètement illusion sur les premières origines de l'Algèbre; toutes nos habitudes d'esprit nous amènent en effet à la rattacher à l'Arithmétique, à la considérer, suivant l'expression de Newton, comme une *Arithmétique universelle,* ne différant de l'Arithmétique ordinaire que par l'emploi des lettres substituées à des nombres.

Il en est à peu près ainsi, en effet, depuis qu'on a pu, à l'imitation des Hindous et des Arabes, introduire dans les éléments les formules des mesures des aires et des volumes; mais les géomètres grecs n'ont pas connu ces formules. Toutefois on admet généralement qu'Archimède, Apollonius et surtout Pappus possédaient une Algèbre relativement assez avancée, vu les transformations déjà fort compliquées qu'ils font subir aux relations qu'ils emploient. Wallis, Chasles et bien d'autres ont non seulement accepté l'hypothèse de l'existence de cette Algèbre, mais ils ont en outre cherché à la restituer. Seulement, et c'est ce qui explique l'insuccès de leurs tentatives, ils se plaçaient toujours au point de vue moderne, c'est-à-dire qu'ils se demandaient par quel artifice les Grecs avaient pu faire concourir leur Arithmétique au progrès de la Géométrie, tandis qu'en réalité les géomètres grecs n'ont jamais eu l'idée de rapporter à des unités les grandeurs sur lesquelles ils spéculaient.

M. Marie montre très bien, par des exemples concluants, que les géomètres grecs n'ont jamais introduit que les grandeurs elles-mêmes dans leurs formules parlées, et il voit avec raison, ce nous semble, la résolution complète des équations du second degré dans celle de ces trois problèmes d'Euclide : *Diviser une droite donnée en deux parties dont la moyenne proportionnelle soit une ligne donnée. Construire un rectangle équivalent à un carré donné et tel que la somme ou la différence de sa base et de sa hauteur soit une longueur don-*

née. Enfin *diviser une droite en moyenne et extrême raison.* Pour les Grecs, en effet, c'était là un mode de résolution achevé, puisque, n'ayant jamais cherché à évaluer les grandeurs en nombre, ils n'avaient à se préoccuper que d'obtenir en quelque sorte des formules géométriques, c'est-à-dire les moyens de construire les racines.

Cette manière de voir a permis à M. Marie de supprimer une anomalie singulière qui avait, depuis un demi-siècle, exercé vainement la sagacité des historiens.

Venturi et à sa suite Chasles et M. Cantor avaient attribué à Héron l'Ancien, qui vivait à Alexandrie 150 ans environ avant notre ère, la paternité d'un Ouvrage de Géodésie intitulé la *Dioptre* (le niveau — Περὶ Διόπτρας) où l'on trouve la description d'un instrument semblable à notre théodolite et en outre la formule de l'aire d'un triangle en fonction des trois côtés. On possède de cet Ouvrage, dont Venturi a révélé l'existence, trois copies manuscrites assez dissemblables et qui appartiennent respectivement à la Bibliothèque nationale et aux bibliothèques de Strasbourg et de Vienne.

D'autre part, il existe trois éditions encore plus discordantes, d'un Ouvrage intitulé la *Géodésie,* et dû à Héron le Jeune qui vivait à Constantinople vers le VIIe ou le VIIIe siècle de notre ère. Ce Traité, qui donne de nombreux détails sur la Topographie de Constantinople à cette époque, renferme, mais seulement dans deux des éditions qui nous restent, l'énoncé sans démonstration du théorème en question sur l'aire du triangle. En outre, dans celle des trois éditions qui ne contient pas cet énoncé, Héron le Jeune avoue, au dire du traducteur Barocci, qu'il a fait de nombreux emprunts à son homonyme Héron l'Ancien, et c'est de cet aveu que Venturi a conclu que la *Dioptre* et, par suite, le pseudo-théodolite et la formule relative à l'aire du triangle appartenaient à Héron l'Ancien.

M. Marie est au contraire porté à croire que la *Dioptre* et la *Géodésie* ne font qu'un même Ouvrage dû à Héron le Jeune, et dont le second n'est qu'un abrégé défectueux et incomplet du premier. Il établit, en tout cas, d'une façon qui nous paraît irréfutable, que la *Dioptre* ne peut être l'Ouvrage de Héron l'Ancien et que son origine est beaucoup moins reculée. Mais laissons ici la parole à notre historien, le jugement qu'il porte sur cette question nous paraissant un exemple bon à citer de saine critique.

« L'aveu (signalé par Barocci) permet-il de trancher la ques-

» tion? Peut-on en conclure que le *Traité de la Dioptre* soit » certainement de Héron l'Ancien, et que Héron le Jeune n'ait » fait que copier plus ou moins maladroitement l'Ouvrage de » son homonyme, en l'abrégeant?

» Il ne me paraît pas que les circonstances soient de nature » à autoriser des conclusions si formelles, parce que, dans l'hy- » pothèse où les deux Ouvrages n'en feraient qu'un, où le » second ne serait qu'une mauvaise copie du premier, il ne » serait pas bien difficile d'admettre qu'un copiste, rencontrant » deux Ouvrages distincts sous certains rapports et pareils » sous d'autres, et s'expliquant d'autant moins le fait que tous » deux portaient le même nom d'auteur, ait attribué l'un à » l'un des Héron et l'autre à l'autre : le plus complet, naturel- » lement, à Héron l'Ancien et l'abrégé à Héron le Jeune; il » serait encore moins étonnant que le copiste eût inséré dans » la *Géodésie* une mention des emprunts faits à la *Dioptre,* et » qu'un autre copiste eût attribué plus tard cette mention à » l'auteur présumé des emprunts. Les altérations de textes ne » sont malheureusement pas assez rares dans les anciens ma- » nuscrits pour qu'une pareille hypothèse soit invraisem- » blable....

» Je crois qu'il convient de rechercher dans l'Ouvrage lui- » même l'époque à laquelle il peut avoir été écrit, et que l'on » sera fondé à rejeter une hypothèse, même appuyée sur des » textes précis, si cette hypothèse ne présente que des invrai- » semblances plus choquantes les unes que les autres.

» Or, je pense qu'il suffira de donner une analyse de la » *Dioptre* pour rendre évidente l'impossibilité de l'attribuer à » Héron l'Ancien....

» C'est un Traité de Géodésie où se trouvent indiquées les » solutions, à l'aide de la dioptre, d'un grand nombre de ques- » tions de Géométrie pratique, telles que : mesurer la diffé- » rence de niveau de deux points visibles ou invisibles l'un de » l'autre; mesurer la surface d'un champ sans y pénétrer, etc....

» L'Ouvrage débute par la description de la dioptre, que » Venturi termine en ajoutant : ON VOIT QUE L'INSTRUMENT DE » HÉRON AVAIT UNE GRANDE RESSEMBLANCE AVEC LES MODERNES » THÉODOLITES.

» J'admets tout cela; car Venturi nous affirme que sa tra- » duction est aussi fidèle que le permettaient le génie de sa » langue, le style des géomètres modernes et les erreurs de sa » copie, car il a collationné les deux manuscrits. J'admets

» tout cela, dis-je, non sans étonnement, il est vrai, mais à la » condition que l'aventure ne se passe pas deux siècles et demi » avant Ptolémée, à moins qu'on ne découvre bientôt que la » dioptre de l'auteur de l'*Almageste* était un cercle répéti- » teur de Borda, divisé par un des Gambey, dont il existait un » si grand nombre à Alexandrie en l'an 158, et muni d'une » lunette de Galilée à laquelle Picard avait ajouté un réticule » et Auzout un micromètre.

» Mais l'hypothèse que Héron l'Ancien ait trouvé vers 100 » la formule de l'aire d'un triangle en fonction de ses côtés » me paraît présenter des invraisemblances encore plus » grandes.

» Ces invraisemblances sautent tellement aux yeux que » Libri, partagé entre le désir de reprendre Chasles, ce dont » il ne manque jamais les occasions qu'il rencontre assez fré- » quemment, et l'ennui de contredire son compatriote, en vient » à supposer que le théorème en question, si le Περὶ Διόπτρας » était l'œuvre de Héron l'Ancien, aurait été intercalé par » quelque Alexandrin.

» Nous ne savons pas d'une manière certaine, dit-il, tome II, » page 481, si cet Ouvrage est celui de Héron l'Ancien, et si en » tout cas il ne contient pas des interpolations faites par ces » mêmes Alexandrins, qui ont attribué à Archimède le petit » écrit sur l'analyse indéterminée dont j'ai parlé précédem- » ment.

» Mais il me semble difficile que ce beau théorème se fût » trouvé dans un Ouvrage aussi ancien que celui du premier » Héron, sans qu'aucun géomètre grec eût songé à le citer.

» En effet, comment pourrait-on admettre, par exemple, que » Pappus, qui a donné un extrait des *Mécaniques* de Héron » l'Ancien dans le huitième Livre de ses *Collections mathé- » matiques,* n'eût pas jugé à propos de dire un seul mot du » théorème dont il s'agit? Mais surtout comment pourrait-on » expliquer le silence gardé sur ce même théorème par Pro- » clus, qui prend la peine de discuter la convenance d'une ré- » duction proposée par Héron l'Ancien dans le nombre des » axiomes admis par Euclide?

» Comment Venturi n'a-t-il pas vu que ces deux faits, qu'il » rapporte lui-même, étaient inconciliables avec son hypothèse?

» Mais cette hypothèse me paraît encore bien plus inad- » missible qu'à Libri, et pour des raisons bien plus considé- » rables.

» Non seulement on ne trouve dans aucun Ouvrage grec, » autre que la *Dioptre*, la formule de la mesure de l'aire d'un » triangle en fonction des mesures de ses côtés, mais on n'y » trouve même pas la formule de cette mesure en fonction des » mesures de la base et de la hauteur; et il y a à cela une ex- » cellente raison : c'est que la formule

$$S = \frac{1}{2} bh$$

» suppose que l'on prenne pour unité de surface le carré con- » struit sur l'unité linéaire, convention qui n'a rien d'obliga- » toire, qu'il faut au moins mentionner quand on la fait, que » Héron le Jeune a bien pu tenir des Hindous, mais qui n'est » indiquée dans aucun auteur grec antérieur à Héron l'Ancien.

» D'un autre côté, si Ptolémée avait connu l'expression de » l'aire d'un triangle sous la forme

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

» à plus forte raison l'aurait-il connue sous la forme plus » simple

$$S = \frac{1}{2} bh = \frac{1}{2} bc \frac{1}{2} \text{corde} 2A = \frac{1}{4} bc \, \text{corde} 2A;$$

» mais alors la comparaison des deux formules lui eût fourni » immédiatement le théorème

$$\text{corde } 2A = 4 \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{bc}.$$

» Or cette formule se trouve-t-elle dans Ptolémée qui, pour » résoudre le moindre triangle, le décompose toujours en deux » triangles rectangles?

» On ne peut donc attribuer le théorème à Héron l'Ancien » sans rejeter Ptolémée dans les catacombes intellectuelles.

» On n'a pas assez remarqué que la maladresse avec laquelle » les anciens établissent les équations dont ils se servent tient » essentiellement à ce qu'ils n'ont pas les formules des mesures » des surfaces et volumes, dont les équivalences nous fournis- » sent beaucoup plus souvent des relations entre les éléments » linéaires des figures que les circonstances de position ou de » similitude que ces éléments peuvent présenter.

» Il y a contradiction à leur faire cadeau des formules des » mesures en leur laissant leur maladresse; et les Grecs, s'ils » pouvaient revenir, seraient les premiers à rejeter un pré- » sent aussi injurieux pour leur intelligence....

» En résumé, je ne crois pas du tout que le *Traité de la* » *Dioptre* soit de Héron l'Ancien, et si l'on ne veut pas qu'il » soit de Héron le Jeune, alors il faudra, je pense, chercher un » troisième Héron. »

IV.

Les géomètres arabes et leurs imitateurs juifs ou chrétiens, jusqu'à Viète, appliquaient déjà leur Algèbre à la solution des problèmes de Géométrie, en ce sens qu'ils arrivaient à calculer les mesures de quelques lignes inconnues de certaines figures, connaissant celles d'autres lignes qui pouvaient servir à la construction ou à la définition de ces figures. Mais ils avaient toujours soin de choisir des nombres entiers pour représenter les données, et ils s'arrangeaient en outre généralement de façon que les inconnues fussent représentées par des nombres, sinon entiers, au moins commensurables.

Du reste, pour établir leurs théorèmes d'Algèbre, ils allaient puiser leurs démonstrations dans Euclide. Cardan lui-même, pour démontrer la formule relative au cube de la somme de deux nombres, en est réduit à suppléer, sous ce rapport, le géomètre grec, et à effectuer la décomposition en quatre parties du cube construit sur la somme de ces lignes.

L'accord du concret et de l'abstrait était donc loin encore d'être établi, et c'est à Viète qu'était réservé le mérite de l'instituer, quoique d'une façon bien singulière. Peu de temps après, Descartes le fonda sur de nouvelles bases, et la méthode moderne sortit enfin des mains de Wallis. Rien n'est plus intéressant que l'histoire de ces transformations, et nous aurions eu plaisir à en retracer les phases successives; mais les bornes qui nous sont imposées ne nous permettent que de renvoyer le lecteur aux pages attrayantes que M. Marie a consacrées à Viète et à Descartes, et dans lesquelles il caractérise avec tant de justesse les révolutions opérées par ces deux savants illustres.

Nous ne ferons plus qu'une citation : c'est le récit de la vie aventureuse de Raymond Lulle ; nous choisissons cet exemple pour doner une idée des ressources que M. Marie puise dans son style.

« Originaire de Belgique, le père de Raymond Lulle avait » aidé, en 1231, Jaques Ier, roi d'Aragon, à enlever aux Sarra- » zins les îles de Majorque et de Minorque, et y avait obtenu, » après la victoire, des seigneuries importantes.

» Raymond Lulle fut d'abord page, puis grand sénéchal du » roi d'Aragon. Il se maria très jeune et fut bientôt père de » trois enfants; mais il abandonna presque aussitôt sa jeune » femme et ses enfants, pour se lancer dans une vie d'aventures » presque fabuleuses, à la suite d'un chagrin amoureux, déjà » fort bizarre.

» Il laisse la moitié de son bien à sa femme, donne le reste » aux pauvres et va vivre dans la montagne en ermite. Là il » apprend les langues anciennes, et surtout l'arabe, dévore » tous les livres de Science qu'il peut se procurer; puis, un » beau jour, descend de la montagne pour prêcher une nou- » velle philosophie et pour convertir les infidèles.

» Il ne rêve pas une nouvelle croisade à main armée, mais » il veut que pape et princes se liguent pour répandre et » propager l'enseignement de l'arabe et des Sciences arabes, afin » de pouvoir adresser aux infidèles une foule imposante de doc- » teurs capables de leur montrer leur erreur et de les gagner à » la foi.

» Il fait dans cette vue cinquante voyages à Paris, à Rome, à » Londres, et, éconduit à peu près partout, il s'en va seul prê- » cher les infidèles et disputer avec leurs docteurs; on l'insulte, » on le bat, on l'emprisonne, on le chasse; il revient à Rome » ou à Paris raconter les avantages qu'il a obtenus, retourne » en Afrique, se fait de nouveau condamner, s'évade, etc. Enfin » il parvint, à quatre-vingts ans, à se faire lapider à Bougie, » et encore pas tout à fait, car des marchands génois, ayant re- » connu son cadavre, l'emportèrent sur leur vaisseau où il re- » vint d'abord à lui, pour mourir, il est vrai, deux jours après, » avant d'atteindre Majorque, où son tombeau existe encore » et où il est regardé comme un saint.

» Ses innombrables voyages le mirent deux fois en présence » d'Arnaud de Villeneuve, à Montpellier d'abord, puis à Naples. » Il se lia avec notre chimiste, en suivit les leçons avec l'en- » thousiasme qu'il apportait à toutes choses et voulut devenir » maître en cette Science.

« D'après l'exposé de ses aventures, on croirait impossible, dit » M. Dumas, que Raymond Lulle ait pu laisser, sur la Chimie sur- » tout, des Ouvrages dignes de quelque attention. Comment imaginer, » en effet, qu'une vie si agitée lui ait permis de méditer des idées » profondes et de se livrer à des travaux importants?

» Mais, tout en voyageant sans cesse, il trouvait le moyen d'écrire

» dans presque tous les pays sur la Chimie, la Physique, la Méde-
» cine et la Théologie.

» Dégagez de ses Ouvrages l'élément alchimique, et vous serez » surpris d'y observer une méthode et des détails qui maintenant » nous étonnent.

» Parmi les alchimistes, Raymond de Lulle a fait école, et l'on » peut dire qu'il a donné une direction utile. En effet, c'est lui qui, » cherchant la pierre philosophale par la voie humide, et qui, em- » ployant la distillation comme moyen, a fixé l'attention sur les pro- » duits volatils de la décomposition des corps. »

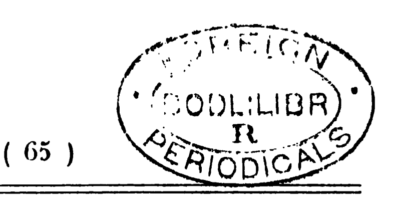
» Sa recette pour la pierre philosophale paraît consister dans » la préparation de l'acide nitrique, qu'il obtenait en distillant » un mélange de nitre et de sulfate de mercure.

» Cet acide dissolvait l'argent, et, additionné d'un *mercure* » *végétal* (qu'on croit être de l'esprit pyro-acétique), il dis- » solvait l'or : il pouvait donc engendrer ces métaux précieux. » Nous supposons du moins que c'était l'idée de Raymond, car, » naturellement, la conclusion manque, c'est-à-dire l'or. »

C'est cette allure vive et charmante qui a permis de condenser en quatre Volumes tant de faits intéressants, tant d'appréciations judicieuses. On est surpris de pouvoir acquérir d'une manière aisée et si prompte des connaissances si complètes. Aussi bien, tout dans ces jolis Volumes concourt à l'agrément du lecteur : c'est l'art avec lequel l'auteur sait aplanir la route; c'est la simplicité du plan qui, grâce à de nombreuses préfaces marquant les tendances de chaque époque, apparaît toujours nettement, malgré la diversité des sujets traités; c'est enfin la commodité du format, l'élégance des caractères employés, l'heureuse disposition du texte où se manifeste une fois de plus le goût exquis de notre savant éditeur, M. Gauthier-Villars.

Il ne nous reste plus qu'à exprimer un désir : c'est que ce bel Ouvrage se répande vite partout et en grand nombre, qu'il figure dans toutes nos Bibliothèques publiques, et surtout dans celles de nos Facultés, de nos Lycées, de nos Collèges. Épargnant aux maîtres bien des recherches, il inspirera aux élèves le goût de la Science et le respect pour tous les hommes qui ont consacré leur vie à la faire progresser.

EUGÈNE ROUCHÉ.



THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES SÉRIES RÉCURRENTES:

PAR M. MAURICE D'OCAGNE,
Élève Ingénieur des Ponts et Chaussées.

I. — *Introduction.*

1. Le but du présent Mémoire est l'étude, par une méthode élémentaire, des séries définies par la loi de récurrence

$$U_n = a U_{n-1} + b U_{n-2} + \ldots + l U_{n-p},$$

et les valeurs des *termes initiaux* U_0, U_1, ..., U_{p-1}, supposées d'ailleurs *absolument quelconques*.

Nous faisons voir que les valeurs des termes d'une pareille série se déduisent des termes d'une autre série que nous appelons *fondamentale* et qui s'obtient en conservant la même loi de récurrence, mais en adoptant pour les termes initiaux les valeurs $U_0 = 0$, $U_1 = 0$, ..., $U_{p-2} = 0$, $U_{p-1} = 1$.

Quant aux termes de cette série fondamentale, nous les obtenons très simplement par l'emploi d'un algorithme, qui a fait l'objet d'une de nos Notes dans les *Nouvelles Annales* (¹), et sur lequel nous avons pensé qu'il serait bon de donner de nouveau quelques explications succinctes; aussi le n° II du Mémoire est-il consacré à un résumé des propriétés de la fonction que représente cet algorithme.

L'introduction de cet algorithme n'a pas pour but, sauf dans le cas du deuxième degré, de calculer *pratique-*

(¹) 3ᵉ série, t. II, p. 230.

ment les termes de la série, mais de les mettre sous une forme qui se prête facilement à établir certaines formules relatives à ces termes, et à opérer certaines transformations algébriques auxquelles ils donnent lieu.

Nous suivons, dans la rédaction de ce Mémoire, l'ordre même dans lequel nous sommes arrivé aux divers résultats que nous énonçons.

Nous n'avions d'abord traité la question que dans le cas d'une formule de récurrence à deux termes

$$U_n = aU_{n-1} + bU_{n-2}.$$

Aussi commencerons-nous par faire une étude spéciale des séries de ce genre. La simplicité du problème conduit, dans ce cas, à des résultats intéressants qu'il n'est peut-être pas mauvais de signaler à part. Cette première étude permet d'ailleurs de saisir plus facilement la méthode employée dans le cas général.

Nous avons présenté notre travail à M. Désiré André qui a, dans une Thèse remarquable, traité la question des séries récurrentes dans sa plus grande généralité. La plupart de nos résultats ne sont probablement que des réductions de ses formules très générales; il ne serait pas toujours facile de s'en assurer. M. André a bien voulu, cependant, nous engager à publier notre travail, qui peut avoir quelque intérêt, comme cas particulier, et qui, d'ailleurs, contient plusieurs formules nouvelles.

Les nos XIII, XIV et XV sont consacrés à des applications.

II. — *Définition et propriétés de* $[a_1 a_2 \ldots a_p]^{(m)}$.

2. Considérons le développement de la $m^{\text{ième}}$ puissance du polynôme $a_1 + a_2 + \ldots + a_p$; ce développement se

compose de termes de la forme

$$\mathrm{K} a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_p^{\alpha_p},$$

$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p$ étant égal à m et K étant un coefficient dont on connaît la loi. Dans ce développement, remplaçons tous les coefficients K par l'unité, et représentons la fonction de $a_1, a_2, \ldots, a_p$ ainsi obtenue à l'aide de la notation

$$[a_1 a_2 \ldots a_p]^{(m)}.$$

3. Cette fonction jouit des propriétés exprimées par les égalités suivantes :

$$(1)\quad [a_1 a_2 \ldots a_p]^{(m)} = [a_1 a_2 \ldots a_{p-1}]^{(m)} + a_p [a_1 a_2 \ldots a_p]^{(m-1)},$$

$$(2)\quad \begin{cases} [a_2 a_3 \ldots a_p a_{p+1}]^{(m)} - [a_1 a_2 a_3 \ldots a_p]^{(m)} \\ \quad = (a_{p+1} - a_1)[a_1 a_2 a_3 \ldots a_p a_{p+1}]^{(m-1)}, \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} [a_1 a_2 \ldots a_{p-1} a_p]^{(m)} \\ \quad = [a_1 a_2 \ldots a_{p-1}]^{(m)} + a_p [a_1 a_2 \ldots a_{p-1}]^{(m-1)} \\ \quad\quad + a_p^2 [a_1 a_2 \ldots a_{p-1}]^{(m-2)} + \ldots + a_p^m [a_1 a_2 \ldots a_{p-1}]^{(0)}. \end{cases}$$

Il y a lieu de remarquer que, comme pour la fonction exponentielle, la valeur de $[a_1 a_2 \ldots a_p]^{(m)}$, pour $m = 0$, sera prise égale à 1.

La démonstration de ces formules est des plus aisées ; on établit la première en mettant à part tous les termes contenant a_p, puis évaluant les deux parties ainsi formées dans $[a_1 a_2 \ldots a_p]^{(m)}$; les deux autres formules s'en déduisent immédiatement.

4. Nous avons aussi démontré, dans la Note citée plus haut, que si l'on pose

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_p)$$
$$= x^p + \mathrm{A}_1 x^{p-1} + \ldots + \mathrm{A}_{p-1} x + \mathrm{A}_p,$$

on a

$$(4)\quad [a_1 a_2 \ldots a_p]^{(m)} = \sum \frac{a^{p-1+m}}{f'(a)},$$

le signe Σ s'étendant à toutes les quantités $a_1, a_2, \ldots, a_p$ supposées réelles et inégales.

5. Enfin, on trouve dans la même Note, la formule

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x^p} + \frac{[a_1 a_2 \ldots a_p]^{(1)}}{x^{p+1}} + \ldots + \frac{[a_1 a_2 \ldots a_p]^{(m)}}{x^{p+m}} + \ldots;$$

multipliant les deux membres par $f(x)$, on a dès lors, en identifiant, la relation générale

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} &[a_1 a_2 \ldots a_p]^{(m)} + A_1 [a_1 a_2 \ldots a_p]^{(m-1)} + \ldots \\ &\qquad + A_p [a_1 a_2 \ldots a_p]^{(m-p)} = 0. \end{aligned} \right.$$

C'est cette formule qui va servir de point de départ à notre étude.

III. — *Calcul du terme u_n de la série définie par la loi de récurrence $u_n = au_{n-1} + bu_{n-2}$ avec les conditions initiales $u_0 = 0$, $u_1 = 1$.*

6. Remarquons d'abord que

$$u_2 = au_1 + bu_0 = a.$$

Cela dit, considérons l'équation

$$x^2 - ax - b = 0.$$

Si α et β désignent les racines de cette équation, on a, d'après la formule (5),

$$[\alpha\beta]^{(n)} - a[\alpha\beta]^{(n-1)} - b[\alpha\beta]^{(n-2)} = 0$$

ou

$$[\alpha\beta]^{(n)} = a[\alpha\beta]^{(n-1)} + b[\alpha\beta]^{(n-2)}.$$

Les quantités $[\alpha\beta]^{(n)}$ suivent donc la même loi de récurrence que les quantités u_n; d'ailleurs

$$[\alpha\beta]^{(0)} = 1 = u_1,$$
$$[\alpha\beta]^{(1)} = \alpha + \beta = a = u_2,$$

par conséquent

$$(6) \qquad u_n = [\alpha\beta]^{(n-1)}.$$

Nous avons ainsi très simplement la valeur cherchée : nous pouvons la transformer.

7. En effet, d'après la formule (2), nous avons

$$\alpha^n - \beta^n = (\alpha - \beta)[\alpha\beta]^{(n-1)},$$

d'où

$$(7) \qquad u_n = [\alpha\beta]^{(n-1)} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}.$$

8. Si, dans la formule (7), nous remplaçons α et β par leurs valeurs en fonction de a et b, et si nous développons, nous arrivons, après des calculs dont le détail est tout à fait dépourvu d'intérêt, au résultat suivant :

$2p$ désignant le plus grand nombre pair inférieur à n, de telle façon que

$$n = 2p + 1, \quad \text{si } n \text{ est impair,}$$
$$n = 2p + 2, \quad \text{si } n \text{ est pair,}$$

on a

$$(8) \left\{ \begin{aligned} u_n = a^{n-1} + \frac{n-2}{1} a^{n-3} b + \frac{(n-3)(n-4)}{1.2} a^{n-5} b^2 + \ldots \\ + \frac{(n-[p+1])\ldots(n-2p)}{1.2\ldots p} a^{n-(2p+1)} b^p. \end{aligned} \right.$$

C'est cette formule [1] qu'il conviendrait d'appliquer, dans la pratique, si α et β étaient incommensurables.

---

[1] On trouve cette formule dans les *Nouvelles Annales* (2e série, t. XX, p. 257), mais avec une démonstration légèrement erronée.

IV. — *Somme des n premiers termes de la série précédente; limite de cette somme.*

9. Nous ne tenons pas compte du terme u_0, qui est nul; la somme que nous voulons évaluer est

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

D'après la formule (6), on a

$$S_n = [\alpha\beta]^{(0)} + [\alpha\beta]^{(1)} + \ldots + [\alpha\beta]^{(n-1)};$$

or la formule (3) donne

$$[\alpha\beta 1]^{(n-1)} = [\alpha\beta]^{(n-1)} + [\alpha\beta]^{(n-2)} + \ldots + [\alpha\beta]^{(0)}:$$

donc

$$S_n = [\alpha\beta 1]^{(n-1)}. \tag{9}$$

10. Nous pourrons donner à cette expression une forme plus commode pour le calcul, si α et β sont différents de 1, en posant

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= (x-1)(x-\alpha)(x-\beta) \\ &= (x-1)(x^2 - ax - b). \end{aligned}$$

Par application de la formule (4), on a

$$S_n = [\alpha\beta 1]^{(n-1)} = \frac{\alpha^{n+1}}{\varphi'(\alpha)} + \frac{\beta^{n+1}}{\varphi'(\beta)} + \frac{1}{\varphi'(1)}. \tag{10}$$

11. Si α et β sont inférieurs à l'unité, la somme S_n, pour n croissant indéfiniment, a une limite que nous représentons par S, et nous aurons

$$S = \frac{1}{\varphi'(1)} = \frac{1}{1-(a+b)}. \tag{11}$$

V. — *Calcul du terme* U_n *de la série définie par la loi de récurrence* $U_n = aU_{n-1} + bU_{n-2}$, U_0 *et* U_1 *étant absolument quelconques.*

12. Nous appellerons *série fondamentale* de cette série celle qu'on obtient en conservant les mêmes valeurs de a et de b, et en prenant $U_0 = 0$, $U_1 = 1$, et nous la représenterons par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, u_2, ..., u_n, ...

Posons, d'une manière générale, pour toute valeur de n,

$$U_n - U_1 u_n = V_n.$$

On a

$$V_n = aV_{n-1} + bV_{n-2}.$$

D'ailleurs, par définition,

$$V_0 = U_0 - U_1 u_0 = U_0,$$
$$V_1 = U_1 - U_1 u_1 = 0,$$

et, par conséquent,

$$V_2 = aV_1 + bV_0 = bU_0.$$

Écrivons alors les égalités qui lient les quantités V, en les divisant par bU_0,

$$\frac{V_n}{bU_0} = a\frac{V_{n-1}}{bU_0} + b\frac{V_{n-2}}{bU_0}.$$

Comme nous avons

$$\frac{V_1}{bU_0} = 0 = u_0,$$
$$\frac{V_2}{bU_0} = 1 = u_1,$$

nous en déduisons

$$\frac{V_n}{bU_0} = u_{n-1}.$$

Par suite,

$$(12) \qquad U_n = U_1 u_n + V_n = U_1 u_n + bU_0 u_{n-1}.$$

Nous avons ainsi l'expression d'un terme quelconque de la série en fonction des termes de la série fondamentale.

13. Transformons cette expression à l'aide de la formule (6); cela nous donne

$$(13) \qquad U_n = U_1[\alpha\beta]^{(n-1)} + b\,U_0[\alpha\beta]^{(n-2)},$$

α et β étant toujours les racines de l'équation

$$x^2 - ax - b = 0,$$

ou, en tenant compte de la formule (2),

$$(14) \qquad U_n = \frac{U_1(\alpha^n - \beta^n) + b\,U_0(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})}{\alpha - \beta}.$$

14. Prenons pour termes initiaux deux termes consécutifs de la série fondamentale u_{p-1} et u_p, de façon que

$$U_0 = u_{p-1},$$
$$U_1 = u_p,$$
$$U_n = u_{n+p-1}.$$

L'application de la formule (12) donne

$$(15) \qquad u_{n+p-1} = u_p u_n + b u_{p-1} u_{n-1}.$$

15. Faisons maintenant, dans la formule (15), $n = p$; nous avons

$$(16) \qquad u_{2p+1} = u_p^2 + b u_{p-1}^2.$$

En particulier, si $b = 1$,

$$u_{2p+1} = u_p^2 + u_{p-1}^2.$$

Donc, dans une série récurrente définie par

$$u_n = a u_{n-1} + u_{n-2},$$
$$u_0 = 0,$$
$$u_1 = 1,$$

la somme des carrés de deux termes consécutifs est égale au terme dont l'indice est la somme des indices des deux termes considérés.

VI. — *Somme des n premiers termes de la série précédente; limite de cette somme.*

16. Nous laissons le terme U_0; la somme que nous voulons évaluer est

$$S_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_n.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} U_n &= U_1[\alpha\beta]^{(n-1)} + b\,U_0[\alpha\beta]^{(n-2)}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ U_2 &= U_1[\alpha\beta]^{(1)} + b\,U_0[\alpha\beta]^{(0)}, \\ U_1 &= U_1[\alpha\beta]^{(0)}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} S_n = U_1(&[\alpha\beta]^{(n-1)} + \ldots + [\alpha\beta]^{(1)} + [\alpha\beta]^{(0)}) \\ &+ b\,U_0([\alpha\beta]^{(n-2)} + \ldots + [\alpha\beta]^{(0)}) \end{aligned}$$

ou

$$S_n = U_1[\alpha\beta 1]^{(n-1)} + b\,U_0[\alpha\beta 1]^{(n-2)}. \tag{17}$$

17. Posons, comme nous avons fait précédemment,

$$\varphi(x) = (x - 1)(x^2 - ax - b).$$

Nous aurons, en supposant α et β différents de 1,

$$\left\{\begin{aligned} S_n = U_1&\left[\frac{\alpha^{n+1}}{\varphi'(\alpha)} + \frac{\beta^{n+1}}{\varphi'(\beta)} + \frac{1}{\varphi'(1)}\right] \\ &+ b\,U_0\left[\frac{\alpha^n}{\varphi'(\alpha)} + \frac{\beta^n}{\varphi'(\beta)} + \frac{1}{\varphi'(1)}\right]. \end{aligned}\right. \tag{18}$$

18. Si α et β sont inférieurs à l'unité, et si S désigne la limite de S_n, pour n croissant indéfiniment, nous avons

$$S = \frac{U_1 + b\,U_0}{\varphi'(1)}$$

ou

$$\text{(19)} \qquad S = \frac{U_1 + bU_0}{1 - (a+b)}.$$

19. La comparaison des formules (11) et (19) conduit à une remarque assez curieuse : si $U_1 + bU_0$ est égal à 1, la limite de la somme de la série est la même que celle de sa série fondamentale.

VII. — *Application aux séries définies par*

$$X_n = a(X_{n-1} - X_{n-2}) + c,$$

et les valeurs initiales X_0 *et* X_1.

20. Cherchons la valeur de X_n en fonction de X_0, X_1 a et c.

A cet effet, considérons la série donnée par la loi

$$x_n = a(x_{n-1} - x_{n-2}),$$

avec les conditions initiales $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, et posons

$$X_n - x_n - c = Y_n.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} X_n - x_n - c &= a(X_{n-1} - X_{n-2}) - a(x_{n-1} - x_{n-2}) \\ &= a(X_{n-1} - x_{n-1}) - a(X_{n-2} - x_{n-2}) \\ &= a(X_{n-1} - x_{n-1} - c) - a(X_{n-2} - x_{n-2} - c) \end{aligned}$$

ou

$$Y_n = a(Y_{n-1} - Y_{n-2}).$$

La série fondamentale de la série définie par cette relation est la série des quantités x_n. Nous avons donc, d'après la formule (12),

$$Y_n = Y_1 x_n - aY_0 x_{n-1}$$

ou

$$X_n - x_n - c = (X_1 - x_1 - c)x_n - a(X_0 - x_0 - c)x_{n-1};$$

d'où, puisque $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$,

(20) $$X_n = (X_1 - c)x_n - a(X_0 - c)x_{n-1} + c,$$

ou, si α et β sont les racines de l'équation

$$x^2 - ax + a = 0,$$

$$X_n = (X_1 - c)[\alpha\beta]^{(n-1)} - a(X_0 - c)[\alpha\beta]^{(n-2)} + c.$$

Si $a = 1$ et $X_0 = X_1 = c + 1$, la formule (20) devient

$$X_n = x_{n+1} + c.$$

VIII. — *Application au calcul des réduites de la fraction continue*

$$z = a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \ldots}}$$

21. Considérons la série récurrente définie par

$$u_n = au_{n-1} + u_{n-2},$$

avec $u_0 = 0$, $u_1 = 1$.

En désignant par

$$z_n = \frac{p_n}{q_n}$$

la n^{ieme} réduite de la fraction continue donnée, on a

$$p_n = ap_{n-1} + p_{n-2},$$
$$q_n = aq_{n-1} + q_{n-2}.$$

D'ailleurs, en prenant, comme c'est l'habitude, la réduite initiale fictive $\frac{p_0}{q_0} = \frac{1}{0}$, on a

$$p_0 = 1, \quad q_0 = 0,$$
$$p_1 = a, \quad q_1 = 1.$$

Comparant à la série définie ci-dessus, on voit que

$$p_n = u_{n+1},$$
$$q_n = u_n,$$

donc

$$z_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

22. D'après la formule (7), en appelant α et β les racines de l'équation

$$z^2 - az - 1 = 0,$$

on aura

(21) $$z_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha^n - \beta^n},$$

dont la limite, pour n croissant indéfiniment, est bien α, valeur de la fraction continue.

IX. — *Calcul du terme u_n de la série définie par la loi de récurrence $u_n = au_{n-1} + bu_{n-2} + \ldots + lu_{n-p}$, avec les conditions initiales $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, ..., $u_{p-2} = 0$, $u_{p-1} = 1$.*

23. Considérons l'équation

$$x^p - ax^{p-1} - bx^{p-2} - \ldots - l = 0.$$

D'après la formule (5), nous avons, en appelant α_1, α_2, ..., α_p les racines de cette équation,

$$[\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p]^{(m)} - a[\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p]^{(m-1)} - \ldots \\ - l[\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p]^{(m-p)} = 0$$

ou

$$[\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p]^{(m)} = a[\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p]^{(m-1)} + \ldots \\ + l[\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p]^{(m-p)}.$$

De plus, on a

$$[\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p]^{(0)} = 1 = u_{p-1},$$
$$[\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p]^{(1)} = a[\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p]^{(0)} = au_{p-1} = u_p,$$
$$[\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p]^{(2)} = a[\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p]^{(1)} + b[\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p]^{(0)} \\ = au_p + bu_{p-1} = u_{p+1},$$

et ainsi de suite.

On voit donc que

$$[\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p]^{(m)} = u_{m+p-1};$$

donc

$$u_n = [\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p]^{(n-p+1)}. \tag{22}$$

24. Si toutes les racines $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ sont réelles et inégales, et si l'on pose

$$\varphi(x) = x^p - ax^{p-1} - \dots - l,$$

on a, d'après la formule (4),

$$u_n = \frac{\alpha_1^n}{\varphi'(\alpha_1)} + \frac{\alpha_2^n}{\varphi'(\alpha_2)} + \dots + \frac{\alpha_p^n}{\varphi'(\alpha_p)}. \tag{23}$$

X. — *Somme d'un nombre fini de termes de la série précédente; limite de cette somme.*

25. Nous n'avons pas à tenir compte des termes u_0, $u_1, u_2, \dots, u_{p-2}$, qui sont nuls. La somme que nous voulons évaluer est

$$S_n = u_{p-1} + u_p + \dots + u_n,$$

ou

$$S_n = [\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p]^{(0)} + [\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p]^{(1)} + \dots + [\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p]^{(n-p+1)}.$$

L'application de la formule (3) donne

$$S_n = [\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p \, 1]^{n-p+1}. \tag{24}$$

26. Si l'on pose

$$\psi(x) = \varphi(x)(x-1),$$

la formule (4) permet d'écrire, en supposant $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ différents de 1,

$$S_n = \frac{\alpha_1^{n+1}}{\psi'(\alpha_1)} + \frac{\alpha_2^{n+1}}{\psi'(\alpha_2)} + \dots + \frac{\alpha_p^{n+1}}{\psi'(\alpha_p)} + \frac{1}{\psi'(1)}.$$

Dès lors, si $x_1, x_2, \ldots, x_p$ sont inférieurs à l'unité, S_n a, pour n croissant indéfiniment, une limite donnée par

$$S = \frac{1}{\psi'(1)}$$

ou

(25) $$S = \frac{1}{1-(a+b+\ldots+l)}.$$

XI. — *Calcul du terme U_n de la série définie par la loi de récurrence $U_n = aU_{n-1} + bU_{n-2} + \ldots + lU_{n-p}$, $U_0, U_1, \ldots, U_{p-1}$ étant absolument quelconques.*

27. Représentons la série fondamentale de la série donnée par

$$\begin{aligned} u_n &= au_{n-1} + bu_{n-2} + \ldots + lu_{n-p}, \\ u_0 &= 0, \\ u_1 &= 0, \\ &\ldots\ldots \\ u_{p-2} &= 0, \\ u_{p-1} &= 1, \end{aligned}$$

et posons, par analogie avec ce qui a été fait au n° 12,

(α) $$U_n - \lambda U_{p-1} u_{n+p-2} - \mu U_{p-2} u_{n+p-3} - \ldots - \theta U_1 u_n = V_n,$$

$\lambda, \mu, \ldots, \theta$ étant des coefficients actuellement indéterminés.

Nous aurons

(β) $$V_0 = U_0 - \lambda U_{p-1} u_{p-2} = U_0,$$

et nous déterminerons les coefficients $\lambda, \mu, \ldots, \theta$, au nombre de $p-1$, par les conditions

$$\begin{aligned} V_1 &= U_1 - \lambda U_{p-1} u_{p-1} = 0, \\ V_2 &= U_2 - \lambda U_{p-1} u_p - \mu U_{p-2} u_{p-1} = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ V_{p-1} &= U_{p-1} - \lambda U_{p-1} u_{2p-3} - \ldots - \theta U_1 u_{p-1} = 0. \end{aligned}$$

D'ailleurs, ce ne sont pas précisément les quantités λ, μ, ..., θ dont nous avons besoin, mais bien les quantités λU_{p-1}, λU_{p-2}, ..., θU_1 ; ce sont donc celles-ci que nous prendrons pour inconnues. Dans ces conditions, u_{p-1} étant égal à 1, le déterminant de ce système d'équations se réduit lui-même à 1.

Dès lors, nous pourrons tirer de ce système d'équations linéaires les valeurs de λU_{p-1}, μU_{p-2}, ..., θU_1, et nous les porterons dans la valeur (α) de V_n. Si nous remarquons d'ailleurs que

$$(\gamma) \qquad V_n = aV_{n-1} + bV_{n-2} + \ldots + lV_{n-p},$$

nous aurons

$$V_p = aV_{p-1} + bV_{p-2} + \ldots + lV_0 = lV_0,$$

ou, d'après (β),

$$V_p = lU_0.$$

Écrivons alors l'égalité (γ), en divisant ses deux membres par lU_0,

$$\frac{V_n}{lU_0} = a\frac{V_{n-1}}{lU_0} + b\frac{V_{n-2}}{lU_0} + \ldots + l\frac{V_{n-p}}{lU_0}.$$

Comme on a, d'ailleurs,

$$\frac{V_1}{lU_0} = 0 = u_0,$$

$$\frac{V_2}{lU_0} = 0 = u_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{V_{p-1}}{lU_0} = 0 = u_{p-2},$$

$$\frac{V_p}{lU_0} = 1 = u_{p-1};$$

on voit que

$$\frac{V_n}{lU_0} = u_{n-1}$$

et

$$V_n = lU_0 u_{n-1}.$$

Par suite, la formule (α) donne

$$(26)\qquad \begin{cases} U_n = \lambda U_{p-1} u_{n+p-2} + \mu U_{p-2} u_{n+p-3} + \ldots \\ \qquad\qquad + \theta U_1 u_n + l U_0 u_{n-1}, \end{cases}$$

λ, μ, ..., θ ayant les valeurs qui ont été déterminées précédemment. Telle est la généralisation de la formule (12).

Nous pourrons donc, en posant

$$\lambda U_{p-1} = \lambda', \quad \mu U_{p-2} = \mu', \quad \ldots, \quad \theta U_1 = \theta',$$

énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Un terme quelconque* U_n *est une fonction linéaire et homogène de* p *termes consécutifs de la série fondamentale, pris à partir de* u_{n-1}, *y compris ce terme*

$$U_n = \lambda' u_{n+p-2} + \mu' u_{n+p-3} + \ldots + \theta' u_n + l U_0 u_{n-1},$$

fonction dont les $p-1$ *coefficients* λ', μ', ..., θ' *sont déterminés par le système d'équations que l'on obtient en faisant successivement dans la formule précédente* $n = 1, 2, 3, \ldots, p-1$.

28. Si nous appelons toujours α_1, α_2, ..., α_p les racines de l'équation

$$\varphi(x) = x^p - a x^{p-1} - \ldots - l = 0,$$

la formule (22) nous permet d'écrire

$$(27)\qquad \begin{cases} U_n = \lambda U_{p-1}[\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p]^{(n-1)} \\ \qquad + \mu U_{p-2}[\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p]^{(n-2)} + \ldots \\ \qquad\qquad + l U_0 [\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p]^{(n-p)}. \end{cases}$$

29. Si l'on prend pour termes initiaux p termes consécutifs de la série fondamentale, de façon que

$$U_0 = u_{m-1}, \quad U_1 = u_m, \quad \ldots, \quad U_{p-2} = u_{m+p-3}, \quad U_{p-1} = u_{m+p-2}$$

et

$$U_n = u_{n+m-1},$$

on a

$$u_{n+m-1} = \lambda u_{m+p-2} u_{n+p-2} + \mu u_{m+p-3} u_{n+p-3} + \ldots \\ + \theta u_m u_n + l u_{m-1} u_{n-1},$$

qu'il est plus rationnel d'écrire, en augmentant m et n d'une unité,

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_{n+m+1} = \lambda u_{m+p-1} u_{n+p-1} + \ldots \\ \qquad + \theta u_{m+1} u_{n+1} + l u_m u_n. \end{array} \right.$$

Si l'on fait $m = n$, on a

$$(29) \quad u_{2n+1} = \lambda u_{n+p-1}^2 + \mu u_{n+p-2}^2 + \ldots + \theta u_{n+1}^2 + l u_n^2.$$

XII. — *Somme des n premiers termes de la série précédente ; limite de cette somme.*

30. Nous laissons de côté le terme U_0 ; la somme que nous voulons évaluer est

$$S_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_n.$$

Or, nous avons, d'après la formule (27),

$$U_n = \lambda U_{p-1} [\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p]^{(n-1)} + \mu U_{p-2} [\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p]^{(n-2)} + \ldots, \\ + l U_0 [\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p]^{(n-p)},$$

....,

$$U_p = \lambda U_{p-1} [\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p]^{(p-1)} + \mu U_{p-2} [\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p]^{(p-2)} + \\ + l U_0 [\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p]^{(0)},$$

....,

$$U_1 = \lambda U_{p-1} [\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p]^{(0)}.$$

Donc

$$S_n = \lambda U_{p-1} ([\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p]^{(n-1)} + \ldots + [\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p]^{(0)}) \\ + \mu U_{p-2} ([\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p]^{(n-2)} + \ldots + [\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p]^{(0)}) \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + l U_0 ([\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p]^{(n-p)} + \ldots + [\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p]^{(0)}),$$

ou, d'après la formule (3),

$$(30)\quad \begin{cases} S_n = \lambda U_{p-1}[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p\,1]^{(n-1)} \\ \qquad + \mu U_{p-2}[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p\,1]^{(n-2)} + \ldots \\ \qquad\qquad + l U_0[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p\,1]^{(n-p)}. \end{cases}$$

31. Si nous posons encore

$$\psi(x) = \varphi(x)(x-1),$$

la formule (4) nous permettra d'écrire, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ étant supposés différents de 1,

$$(31)\quad \begin{cases} S_n = \lambda U_{p-1}\left[\dfrac{\alpha_1^{p+n-1}}{\psi'(\alpha_1)} + \ldots + \dfrac{\alpha_p^{p+n-1}}{\psi'(\alpha_p)} + \dfrac{1}{\psi'(1)}\right] \\ \quad + \mu U_{p-2}\left[\dfrac{\alpha_1^{p+n-2}}{\psi'(\alpha_1)} + \ldots + \dfrac{\alpha_p^{p+n-2}}{\psi'(\alpha_p)} + \dfrac{1}{\psi'(1)}\right] \\ \quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad + l U_0\left[\dfrac{\alpha_1^{n}}{\psi'(\alpha_1)} + \ldots + \dfrac{\alpha_p^{n}}{\psi'(\alpha_p)} + \dfrac{1}{\psi'(1)}\right]; \end{cases}$$

et, si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ sont inférieurs à l'unité, S_n, pour n croissant indéfiniment, aura une limite S qui sera donnée par

$$S = \frac{\lambda U_{p-1} + \mu U_{p-2} + \ldots + \theta U_1 + l U_0}{\psi'(1)}$$

ou

$$(32)\quad S = \frac{\lambda U_{p-1} + \mu U_{p-2} + \ldots + \theta U_1 + l U_0}{1-(a+b+\ldots+l)}.$$

Si donc

$$\lambda U_{p-1} + \mu U_{p-2} + \ldots + \theta U_1 + l U_0 = 1,$$

la série aura même somme que sa série fondamentale.

Applications.

XIII. — *Cas particulier de la série définie par*

$$U_n = p U_{n-1} - \frac{p(p-1)}{1.2} U_{n-2} + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3} U_{n-3} + \ldots \pm U_{n-p},$$

$$U_0 = 0,\quad U_1 = 0,\quad \ldots,\quad U_{p-2} = 0,\quad U_{p-1} = 1.$$

32. Dans ce cas, l'équation résolvante est

$$x^p - p x^{p-1} + \frac{p(p-1)}{1.2} x^{p-2} - \ldots \pm 1 = 0$$

ou

$$(x-1)^p = 0.$$

On a donc, d'après la formule (22) (IX, 23),

$$U_n = [1, 1, \ldots, 1]^{(n-p+1)}.$$

Mais, si nous nous reportons à la définition donnée (II, 2), nous voyons que $[1, 1, \ldots, 1]^{(n-p+1)}$ n'est autre que le nombre des termes du développement de

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_p)^{n-p+1},$$

c'est-à-dire

$$\frac{(n-p+2)(n-p+3)\ldots(n-1)n}{1.2\ldots(p-2)(p-1)}$$

ou

$$C_n^{p-1};$$

donc

$$U_n = C_n^{p-1}.$$

33. Appliquons maintenant la formule (24) (X, 25); elle nous donne

$$U_{p-1} + U_p + \ldots + U_n = [1, 1, \ldots, 11]^{(n-p+1)},$$

les 1 étant cette fois en nombre $(p+1)$ dans la parenthèse; nous aurons, par une remarque analogue à la précédente,

$$[11\ldots11]^{(n-p+1)} = C_n^p,$$

ce qui nous conduit au résultat bien connu

$$C_{p-1}^{p-1} + C_p^{p-1} + \ldots + C_n^{p-1} = C_n^p.$$

Nous avons ainsi une vérification de nos formules.

XIV. — *Séries définies par la formule*

$$U_n = a_0 U_{n-1} + a_1 U_{n-2} + \ldots + a_{n-2} U_1 + a_{n-1} U_0$$

et par la valeur de U_0; a_0, a_1, ..., a_{n-1} *étant les termes successifs d'une progression soit géométrique, soit arithmétique.*

On voit que ces séries ne sont pas du genre de celles que nous avons envisagées jusqu'ici, puisque, maintenant, le nombre des termes de la formule de récurrence augmente d'un terme à l'autre de la série.

34. Supposons d'abord que a_0, a_1, ..., a_n,... soient les termes successifs d'une progression géométrique de raison q, de telle sorte que

$$a_n = a_0 q^n.$$

Dans ce cas, la recherche du terme U_n ne présente aucune difficulté. En effet, on a

$$U_{n-1} = a_0 U_{n-2} + a_1 U_{n-3} + \ldots + a_{n-3} U_1 + a_{n-2} U_0,$$
$$U_n \;\; = a_0 U_{n-1} + a_1 U_{n-2} + \ldots + a_{n-3} U_2 + a_{n-2} U_1 + a_{n-1} U_0.$$

Multiplions les deux membres de la première de ces formules par q et retranchons-la de la seconde; nous avons

$$U_n - q U_{n-1} = a_0 U_{n-1}$$

ou

$$U_n = (a_0 + q) U_{n-1}.$$

Les termes de la série sont donc les termes successifs d'une progression géométrique de raison $a_0 + q$ et de premier terme U_1, par suite

(33) $$U_n = (a_0 + q)^{n-1} U_1.$$

La somme d'un nombre fini de termes sera

$$S_n = U_1 \frac{1 - (a_0 + q)^n}{1 - (a_0 + q)},$$

et, si $a_0 + q$ est inférieur à l'unité, cette somme, pour n croissant indéfiniment, aura une limite

$$S = \frac{U_1}{1-(a_0+q)} = \frac{a_0 U_0}{1-(a_0+q)}.$$

La formule (33) conduit à cette remarque curieuse, que, dans une série définie par

$$U_n = a_0 U_{n-1} + a_0 q U_{n-2} + \ldots + a_0 q^{n-2} U_1 + a_0 q^{n-1} U_0,$$

tous les termes sont égaux, sauf U_0, si $a_0 + q = 1$.

35. Supposons maintenant que $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ soient les termes successifs d'une progression arithmétique de raison r, de telle sorte que

$$a_n = a_0 + nr.$$

La recherche du terme U_n est alors un peu plus difficile. Nous avons

$$U_n = a_0 U_{n-1} + a_1 U_{n-2} + \ldots + a_{n-2} U_1 + a_{n-1} U_0,$$
$$U_{n-1} = a_0 U_{n-2} + a_1 U_{n-3} + \ldots + a_{n-2} U_0.$$

Aux deux membres de cette dernière égalité, ajoutons

$$r S_{n-2} = r U_{n-2} + r U_{n-3} + \ldots + r U_1 + r U_0,$$

nous aurons

$$U_{n-1} + r S_{n-2} = a_1 U_{n-2} + a_2 U_{n-3} + \ldots + a_{n-2} U_1 + a_{n-1} U_0.$$

Retranchons cette égalité membre à membre de la première, cela nous donne

$$U_n - U_{n-1} - r S_{n-2} = a_0 U_{n-1}$$

ou

$$U_n = (a_0 + 1) U_{n-1} + r S_{n-2}.$$

On aurait de même

$$U_{n-1} = (a_0 + 1) U_{n-2} + r S_{n-3}.$$

Retranchant la seconde de ces égalités de la première, et remarquant que $S_{n-2} - S_{n-3} = U_{n-2}$, nous avons

$$U_n - U_{n-1} = (a_0 + 1) U_{n-1} - (a_0 + 1) U_{n-2} + r U_{n-2}$$

ou

$$(34) \qquad U_n = (a_0 + 2) U_{n-1} - (a_0 + 1 - r) U_{n-2};$$

comme, d'ailleurs, on a U_0 et que $U_1 = a_0 U_0$, on retombe sur le cas étudié au § V, et l'on sait, par suite, calculer U_n.

Représentant par la lettre u les termes de la série fondamentale correspondante, on a, d'après la formule (22) (V, 12),

$$(35) \qquad U_n = a_0 U_0 u_n - (a_0 + 1 - r) U_0 u_{n-1},$$

et l'on sait obtenir u_n et u_{n-1} en fonction soit des racines, soit des coefficients de l'équation

$$x^2 - (a_0 + 2)x + (a_0 + 1 - r) = 0$$

par l'une des formules (6), (7) ou (8) (III).

36. Supposons que

$$a_0 = -\eta,$$

η étant positif et plus petit que 1, et que

$$r = 1 - \zeta,$$

ζ étant plus petit que 1 et plus grand que η. Dans ce cas, l'équation a ses deux racines réelles et inégales, car

$$B^2 - 4AC = a_0^2 + 4r = \eta^2 + 4 - 4\zeta,$$

qui est positif. D'ailleurs, la somme des racines

$$a_0 + 2 = 2 - \eta$$

est comprise entre 0 et 2; leur produit

$$a_0 + 1 - r = \zeta - \eta$$

est compris entre 0 et 1; ces deux racines sont donc

elles-mêmes comprises entre o et 1. La série est, par suite, convergente, et elle a une somme donnée, d'après la formule (19) (VI, 18), par

$$S = \frac{a_0 U_0 - (a_0 + 1 - r) U_0}{1 - (a_0 + 2) + (a_0 + 1 - r)} = \frac{-(1 - r) U_0}{-r} = \frac{\zeta U_0}{1 - \zeta}.$$

Il est très remarquable que cette somme est indépendante de la valeur de a_0.

XV. — *Séries définies par la formule*

$$U_n = a U_{n-1} + b U_{n-2} + \ldots + l U_{n-p} + m$$

et les valeurs des termes initiaux $U_0, U_1, \ldots, U_{p-1}$.

37. Traitons d'abord le cas où tous les termes initiaux $U_0, U_1, \ldots, U_{p-1}$ sont nuls.

Posant $\frac{U_n}{m} = U'_n$, nous avons

$$U'_n = a U'_{n-1} + b U'_{n-2} + \ldots + l U'_{n-p} + 1.$$

Si l'on pose aussi $U'_n - U'_{n-1} = V_{n-1}$, on a, en retranchant l'une de l'autre les formules qui donnent les valeurs de U'_{n-1} et U'_n,

$$V_{n-1} = a V_{n-2} + b V_{n-3} + \ldots + l V_{n-p-1};$$

d'ailleurs

$$V_0 = 0, \quad V_1 = 0, \quad \ldots, \quad V_{p-2} = 0, \quad V_{p-1} = 1:$$

donc, d'après la formule (24) (X, 25),

$$V_{p-1} + V_p + \ldots + V_{n-1} = [\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p 1]^{(n-p)}.$$

Or

$$U'_n = V_{p-1} + V_p + \ldots + V_{n-1};$$

par suite,

$$U'_n = [\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p 1]^{(n-p)},$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ étant les racines de l'équation

$$x^p - a x^{p-1} - \ldots - l = 0.$$

La valeur de U_n sera, par conséquent,

(36) $$U_n = m[\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p 1]^{(n-p)}.$$

38. Nous pourrons faire la remarque suivante : prenons la série définie par

$$U''_n = (a+1)U''_{n-1} + (b-a)U''_{n-2} + (c-b)U''_{n-3} + \ldots + (l-h)U''_{n-p} - lU''_{n-p-1},$$
$$U''_0 = 0, \quad U''_1 = 0, \quad \ldots, \quad U''_{p-1} = 0, \quad U''_p = 1,$$

dont l'équation résolvante a pour racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ et 1 ; nous aurons, par la formule (22) (IX, 23),

$$U''_n = [\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p 1]^{(n-p)};$$

par suite,

$$U''_n = U'_n.$$

39. Pour avoir la somme d'un certain nombre de termes, nous écrirons

(37) $$\begin{cases} S_n = U_p + U_{p+1} + \ldots + U_n \\ \quad = m\{[\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p 1]^{(0)} + [\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p 1]^{(1)} + \ldots + [\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p 1]^{(n-p)}\} \\ \quad = m[\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p 1 1]^{(n-p)}. \end{cases}$$

40. Il ne nous reste plus qu'à faire voir comment le cas où les valeurs initiales $U_0, U_1, \ldots, U_{p-1}$ sont quelconques se ramène au précédent. La transformation est tout à fait analogue à celle que nous avons déjà employée (XI, 27).

Représentant par la lettre u les termes de la série fondamentale (pour laquelle $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, $\ldots$, $u_{p-1} = 0$), nous poserons

$$U_n - \lambda u_{n+p} - \mu u_{n+p-1} - \ldots - \theta u_{n+1} = V_n,$$

$\lambda, \mu, \ldots, \theta$, au nombre de p, étant déterminé par le sys-

tème d'équations

$$V_0 = U_0 - \lambda u_p = 0,$$
$$V_1 = U_1 - \lambda u_{p+1} - \mu u_p = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$V_{p-1} = U_{p-1} - \lambda u_{2p-1} - \mu u_{2p-2} - \ldots - \theta u_p = 0,$$

dont le déterminant se réduit à u_p^p, qui est différent de zéro. Écrivons

$$U_n = a U_{n-1} + b U_{n-2} + \ldots + l U_{n-p} + m,$$
$$u_{n+p} = a u_{n+p-1} + b u_{n+p-2} + \ldots + l u_n + m,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$u_{n+1} = a u_n + b u_{n-1} + \ldots + l u_{n+1-p} + m.$$

Multiplions la première de ces égalités par 1, la deuxième par $-\lambda$, ..., la dernière par $-\theta$, et faisons la somme; nous avons

$$V_n = a V_{n-1} + b V_{n-2} + \ldots + l V_{n-p} + m(1 - \lambda - \ldots - \theta)$$

ou, en posant $\dfrac{V_n}{1-(\lambda+\ldots+\theta)} = V'_n$ et supposant

$$\lambda + \mu + \ldots + \theta$$

différent de 1,

$$V'_n = a V'_{n-1} + b V'_{n-2} + \ldots + V'_{n-p} + m,$$

et, comme

$$V'_0 = 0, \quad V'_1 = 0, \quad \ldots, \quad V'_{p-1} = 0,$$

on voit que

$$V'_n = u_n.$$

Par suite,

$$V_n = (1 - \lambda - \mu - \ldots - \theta) u_n$$

et

$$(38) \qquad \begin{cases} U_n = \lambda u_{n+p} + \mu u_{n+p-1} + \ldots \\ \qquad + \theta u_{n+1} + (1 - \lambda - \mu - \ldots - \theta) u_n. \end{cases}$$

41. Dans le cas où $p = 2$, c'est-à-dire où la formule de récurrence se réduit à

$$U_n = a U_{n-1} + b U_{n-2} + c,$$

on a

$$u_2 = c, \quad u_3 = (a + 1)c;$$

par suite, λ et μ sont donnés par

$$U_0 - \lambda c = 0,$$
$$U_1 - \lambda(a + 1)c - \mu c = 0,$$

d'où

$$\lambda = \frac{U_0}{c},$$
$$\mu = \frac{U_1 - (a + 1)U_0}{c}.$$

Donc, dans ce cas,

$$U_n = \frac{U_0}{c} u_{n+2} + \frac{U_1 - (a + 1)U_0}{c} u_{n+1} + \left(1 - \frac{U_1}{c} + \frac{aU_0}{c}\right) u_n,$$

formule qu'on peut transformer en remarquant que

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + c;$$

on trouve alors

$$(39) \quad U_n = \frac{U_1 - U_0}{c} u_{n+1} + \left[1 - \frac{U_1}{c} + \frac{(a + b)U_0}{c}\right] u_n + U_0.$$

Si l'on fait $U_1 = U_0 = c = b = a$, la formule se réduit à

$$(40) \quad U_n = a(2u_n + 1).$$

SUR UNE DÉMONSTRATION NOUVELLE DU THÉORÈME DE LAMBERT;

Par M. N. IOUKOVSKY,
Professeur à l'École Polytechnique de Moscou.

---

1. Nous proposons ici une démonstration nouvelle du théorème de Lambert, fondée sur la formule de la varia-

tion d'action

(1) $$\delta \int v\, ds = v_2 \delta\sigma_2 \cos(v_2 \delta\sigma_2) - v_1 \delta\sigma_1 \cos(v_1 \delta\sigma_1),$$

où v_1 et v_2 sont les vitesses d'un point matériel à l'origine et à la fin de la trajectoire AB; $\delta\sigma_1$ et $\delta\sigma_2$ sont les déplacements AA′ et BB′ des points A et B, quand la trajectoire AB se change en une trajectoire infiniment voisine A′B′.

2. La formule (1), donnant la variation de l'action, peut servir aussi à la détermination de la variation du temps de mouvement des planètes, à cause du lemme suivant :

Le temps dans lequel la planète, sollicitée par le Soleil F, *parcourt l'arc elliptique* AB, *est égal à la fraction* $\frac{\mu}{a}$ *multipliée par l'action du mouvement de la planète sur le même arc elliptique* AB, *le Soleil étant transporté du foyer* F *dans l'autre foyer* F_1 *de l'ellipse.*

μ est le cofficient de l'attraction, et $2a$ est le grand axe de l'orbite elliptique.

Le temps t, dans lequel la planète parcourt l'arc AB, est

(2) $$t = \int \frac{ds}{v},$$

où la vitesse v peut être définie comme une fonction d'un rayon vecteur r par rapport au Soleil F :

$$v = \sqrt{\frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}}.$$

Mais, si le rayon vecteur de la planète par rapport au foyer F_1 est r_1,

(3) $$v = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \sqrt{\frac{r_1}{r}};$$

d'où

$$t = \sqrt{\frac{a}{\mu}} \int \sqrt{\frac{r}{r_1}}\, ds. \tag{4}$$

Le Soleil étant transporté dans le foyer F_1, la vitesse de la planète se change en

$$v_1 = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \sqrt{\frac{r}{r_1}}. \tag{5}$$

En y substituant cette valeur de v_1 dans la formule (4), nous avons

$$t = \frac{\mu}{a} \int v_1\, ds. \tag{6}$$

Le lemme est donc démontré.

3. Revenons à la démonstration du théorème de Lambert :

Le temps dans lequel la planète parcourt l'arc elliptique AB *est une fonction seulement de la corde* $2c$ *de l'arc parcouru, de la somme* 2α *des rayons vecteurs des points* A *et* B *par rapport au Soleil, et du grand axe* $2a$.

Les points A et B étant pris pour les foyers, construisons (*fig.* 1) sur la corde $2c$ deux ellipses confocales dont les grands axes sont

$$\mathrm{CD} = 2\alpha,$$
$$\mathrm{EG} = 4a - 2\alpha.$$

La première de ces ellipses passera par le Soleil parce que

$$\mathrm{FA} + \mathrm{FB} = 2\alpha, \tag{7}$$

et la seconde passera par l'autre foyer F_1 de l'orbite,

parce que, en soustrayant la somme des deux relations

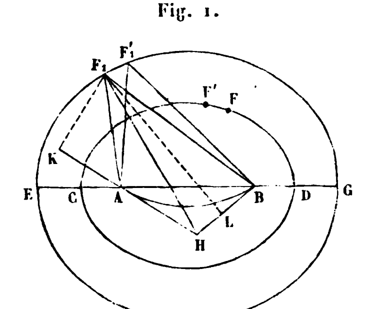
$$(8)\qquad \begin{cases} F_1A + FA = 2a, \\ F_1B + FB = 2a \end{cases}$$

de la formule (7), nous aurons

$$(9)\qquad F_1A + F_1B = 4a - 2\alpha.$$

Supposons que, a et c restant constants, le Soleil soit transporté du point F dans un point infiniment voisin F′ de la même ellipse CD, et cherchons la variation

Fig. 1.



du temps t de passage de la planète du point A au point B. A cause du lemme établi, cette variation est égale à la fraction $\frac{\mu}{a}$ multipliée par la variation de l'action dans le mouvement de la planète du point A jusqu'au point B, subie par la transposition du Soleil du point F_1 dans un point infiniment voisin F'_1 de la même ellipse EG.

Cela posé, nous avons, par la formule (1),

$$(10)\qquad \delta t = \frac{\mu}{a}[v_2\delta\sigma_2\cos(\delta\sigma_2 v_2) - v_1\delta\sigma_1\cos(\delta\sigma_1 v_1)],$$

ou $\delta\sigma_1$ et $\delta\sigma_2$ sont les déplacements des points A et B dans le mouvement de translation du triangle AF_1B par

lequel le point F''_1 est amené au point F_1, c'est-à-dire

$$\delta\sigma_1,\ \delta\sigma_2,\ F_1F'_1.$$

Soient AH et BH les tangentes de l'orbite elliptique aux points A et B. A cause d'un théorème de Géométrie, la ligne F_1H est la bissectrice de l'angle AF'_1B, c'est-à-dire elle est normale à l'ellipse EG; d'où

$$\cos(\delta\sigma_1 v_1) = \sin(AHF_1),$$
$$\cos(\delta\sigma_2 v_2) = \sin(BHF_1).$$

Menons du point F_1 deux perpendiculaires F_1K et F_1L sur les lignes AH et BH, et écrivons, à cause du principe des aires,

$$v_1 F_1 K = v_2 F_1 L;$$

d'autre part, on a

$$F_1K = F_1H\sin(AHF_1) = F_1H\cos(\delta\sigma_1 v_1),$$
$$F_1L = F_1H\sin(BHF_1) = F_1H\cos(\delta\sigma_2 v_2),$$

et, par suite,

$$v_1\cos(\delta\sigma_1 v_1) = v_2\cos(\delta\sigma_2 v_2),$$

d'où il vient, par la formule (10),

$$\delta t = 0.$$

Ainsi, a, c, α restant constants, le temps t ne change pas, c'est-à-dire qu'il dépend seulement de ces variables, ce qu'il s'agissait d'établir.

4. Le théorème étant démontré, il est facile de réduire la détermination du temps de mouvement de la planète à la détermination du temps dans le mouvement rectiligne.

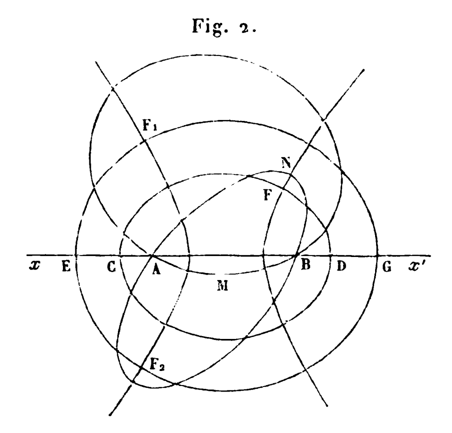
En y soustrayant les formules (8), nous recevons

$$FA - FB = F_1B - F_1A.$$

Cette équation montre que les foyers F et F_1 de l'orbite elliptique se trouvent sur la même hyperbole con-

focale aux ellipses CD et EG. Ainsi (*fig.* 2) à la position donnée du Soleil F et de la corde AB correspondent deux

Fig. 2.



orbites elliptiques FF_1 et FF_2. A la limite, pour $a = \infty$, les points F_1 et F_2 s'éloigneront à l'infini, et les ellipses se changeront en des paraboles, ayant les axes parallèles aux asymptotes de l'hyperbole.

Par le théorème de Lambert, nous pouvons transporter le Soleil du point F dans un point D de l'ellipse CD, en y conservant le temps t.

Cela posé, les branches de l'hyperbole doivent se confondre avec les lignes droites Bx' et Ax, et les orbites elliptiques FF_1 et FF_2 avec la ligne droite DE, parce que

$$DE = 2a - \alpha + \alpha = 2a.$$

Le temps t peut être déterminé par la formule (4), en y posant

$$ds = dr,$$

et en prenant

$$11)\qquad t = \sqrt{\frac{a}{\mu}} \int_{\alpha - c}^{\alpha + c} \sqrt{\frac{r}{2a - r}}\, dr$$

pour l'arc AMB, et

$$(12)\quad t=\sqrt{\frac{a}{\mu}}\int_0^{\alpha-c}\sqrt{\frac{r}{2a-r}}\,dr+\sqrt{\frac{a}{\mu}}\int_0^{\alpha+c}\sqrt{\frac{r}{2a-r}}\,dr$$

pour l'arc ANB.

De ces formules nous tirons, en intégrant la formule de Lambert,

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} t=\frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}}\Bigg[&\left(\text{arc cos}\frac{a-\alpha-c}{a}-\sin\text{arc cos}\frac{a-\alpha-c}{a}\right)\\ &\mp\left(\text{arc cos}\frac{a-\alpha+c}{a}-\sin\text{arc cos}\frac{a-\alpha+c}{a}\right)\Bigg].\end{aligned}\right.$$

Dans le cas où l'orbite est parabolique,

$$\lim\sqrt{\frac{a}{\mu}}\sqrt{\frac{r}{2a-r}}=\sqrt{\frac{r}{2\mu}},$$

et les égalités (11) et (12) donnent la formule d'Euler

$$(14)\qquad t=\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{\mu}}\left[(\alpha+c)^{\frac{3}{2}}\mp(\alpha-c)^{\frac{3}{2}}\right].$$

Le signe (—) doit être pris dans ces formules, si le Soleil est en dehors du contour formé par l'arc et la corde AB, et le signe (+) s'il est à l'intérieur de ce contour.

5. La même méthode de raisonnement peut être employée pour la détermination du temps dans le mouvement hyperbolique ; seulement, en y transposant le Soleil dans le lemme du n° 2, il faudra changer sa force attractive en répulsive.

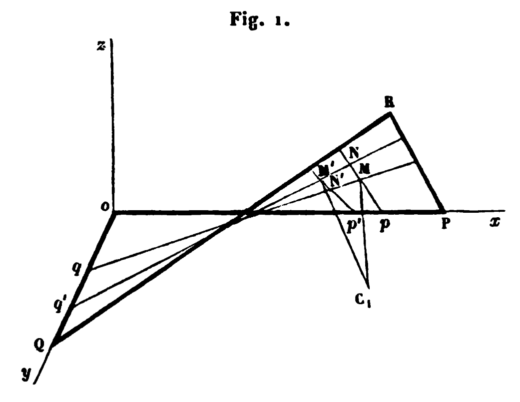
SUR LES LIGNES DE COURBURE DU PARABOLOÏDE ÉQUILATÈRE;

PAR M. P. BARBARIN.

I. Les lignes de courbure du paraboloïde hyperbolique équilatère jouissent d'une propriété remarquable. Elles sont aussi sur cette surface le lieu des points pour lesquels la somme ou la différence des distances aux deux génératrices principales est constante.

Soient, en effet, ox, oy ces deux génératrices, qui sont rectangulaires, oz l'axe de la surface, perpendicu-

Fig. 1.



laires à ces droites. Le paraboloïde est complètement déterminé par le quadrilatère gauche oPQR.

Soient M, M' deux points voisins d'une ligne de courbure; Mp, Mq, M'p', M'q' sont les génératrices passant en ces points; elles forment aussi un quadrilatère gauche MNM'N'. Les normales à la surface en M et M' se coupent au centre de courbure C_1. C_1M est un des rayons principaux de courbure au point M. On a facilement

$$(1) \qquad \overline{MN}^2 + \overline{M'N'}^2 = \overline{MN'}^2 + \overline{M'N}^2.$$

En appelant ε un infiniment petit par rapport à MN, on peut poser

$$M'N' = MN + \varepsilon$$

et aussi

$$M'N = MN' + \varepsilon',$$

d'où

$$2MN \times M'N' = 2MN' \times M'N + (\varepsilon'^2 - \varepsilon^2).$$

On peut négliger devant le produit $2MN' \times M'N$ la différence $\varepsilon'^2 - \varepsilon^2$ qui est un infiniment petit d'un ordre bien supérieur ; et l'on a simplement

$$(2) \qquad 2MN \times M'N' = 2MN' \times M'N.$$

En associant cette relation avec (1), on en déduit

$$MN + M'N' = M'N + MN'$$

et

$$MN - M'N' = M'N - MN',$$

d'où

$$MN = M'N, \quad M'N' = MN';$$

mais, en désignant par η et η' de nouveaux infiniment petits par rapport aux lignes de la figure, on a

$$MN + Mp = M'p' + \eta,$$
$$Mq = MN' + M'q' + \eta',$$

d'où, en ajoutant membre à membre,

$$Mp + Mq = M'p' + M'q' + (\eta + \eta').$$

$\eta + \eta'$ est au moins un infiniment petit du second ordre : il disparait donc devant les autres quantités qui sont finies, et l'on a rigoureusement

$$Mp + Mq = M'p' + M'q' = \text{const.}$$

On démontrerait par un calcul analogue que

$$Nq' - Np = N'q - N'p' = \text{const.};$$

donc les deux séries de lignes de courbure de la surface sont aussi les deux séries de lignes en tous les points

desquelles la somme ou la différence des distances aux génératrices principales est constante.

En un point déterminé M passent deux lignes : l'une, pour laquelle

$$Mp + Mq = \text{const.},$$

a pour tangente la limite de MM'; l'autre, pour laquelle

$$Mq - Mp = \text{const.},$$

a pour tangente la limite de NN'; la figure montre que ces deux tangentes sont rectangulaires, comme on devait s'y attendre, et il résulte des égalités $MN = M'N$ et $M'N' = MN'$ qu'elles sont bissectrices des angles de Mp et Mq.

II. On peut très aisément vérifier ces propriétés par le calcul. Soit, en effet,

$$z = \frac{xy}{a}$$

l'équation du paraboloïde. Le lieu des points M pour lesquels on a

$$Mp \pm Mq = \text{const.}$$

se détermine par l'équation

$$(3) \qquad \sqrt{y^2 + z^2} \pm \sqrt{x^2 + z^2} = c,$$

d'où l'on tire

$$(4) \qquad y\sqrt{x^2 + a^2} \pm x\sqrt{y^2 + a^2} = ac.$$

Différentions cette dernière, en groupant convenablement les termes, nous pourrons l'écrire

$$\left(\sqrt{x^2 + a^2}\,dy \pm \sqrt{y^2 + a^2}\,dx\right)\left[1 \pm \frac{xy}{\sqrt{(x^2 + a^2)(y^2 + a^2)}}\right] = 0,$$

en entendant que les signes supérieurs soient toujours pris simultanément, ainsi que les inférieurs. Aucune va-

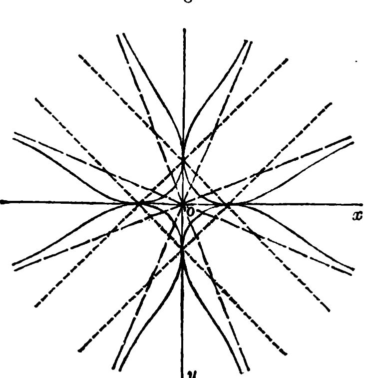
leur réelle de x ou de y n'annule le facteur entre parenthèses ; on doit donc avoir

$$(5) \qquad \sqrt{x^2+a^2}\,dy \pm \sqrt{y^2+a^2}\,dx = 0,$$

ce qui est précisément l'équation des lignes de courbure.

L'équation (4) représente les projections sur le plan xoy des deux lignes qui répondent à une même valeur

Fig. 2.



de la constante arbitraire c. Ces deux projections sont réunies dans l'équation entière

$$(6) \left\{ \begin{aligned} &4c^2x^2y^2 + a^2(x+y+c) \\ &\qquad \times (x+y-c)(x-y+c)(-x+y+c) = 0, \end{aligned} \right.$$

facile à discuter par la méthode des régions. La courbe qu'elle représente a deux axes, les bissectrices des angles de ox avec oy, quatre asymptotes,

$$y = \frac{\mp c \pm \sqrt{c^2+a^2}}{a}\,x,$$

deux à deux symétriques et deux à deux rectangulaires. Enfin elle se compose de quatre branches égales deux à deux, tangentes entre elles et aux axes ox, oy en des

points qui sont les sommets du carré de centre o et de rayon c.

Les deux branches comprises dans l'angle xoy et son opposé répondent au signe $+$ dans le premier membre de l'équation (4); les deux autres branches, au signe $-$.

En un point $m(x_1, y_1)$ du plan xoy, il passe deux courbes caractérisées par l'équation (4) : l'une répond à la valeur

$$c_1 = \frac{y_1\sqrt{x_1^2 + a^2} + x_1\sqrt{y_1^2 + a^2}}{a}$$

de la constante, l'autre à la valeur

$$c_2 = \frac{y_1\sqrt{x_1^2 + a^2} - x_1\sqrt{y_1^2 + a^2}}{a};$$

nous désignerons ces courbes par c_1 et c_2.

III. Je vais faire connaître une construction simple des tangentes au point m à ces deux courbes. En effet, on a

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \pm \frac{\sqrt{y_1^2 + a^2}}{\sqrt{x_1^2 + a^2}};$$

il suffit de prolonger mp de $pp_1 = a$ et mq de $qq_1 = a$,

Fig. 3.

en rabattant oq_1 suivant os sur oy et op_1 suivant ot_1 et ot_2 de part et d'autre sur ox; st_1 est la direction de la tangente en m à la courbe c_1, st_2 est la direction de la

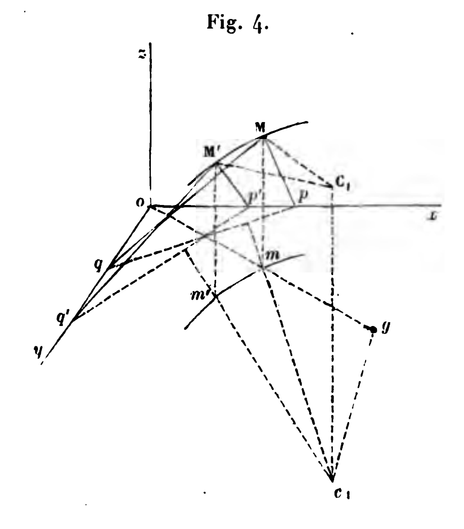
tangente en m à la courbe c_2. Il en résulte un moyen de construire sur le paraboloïde les tangentes aux lignes de courbure qui passent en un point donné M de cette surface, car leurs projections sur le plan xoy sont précisément les tangentes en m à c_1 et c_2.

On a vu, du reste, plus haut, que les tangentes au point M sont les bissectrices des angles des génératrices Mp, Mq de ce point; ou encore, si l'on veut, les axes de l'indicatrice, asymptote précisément à ces deux génératrices.

Les deux modes de construction peuvent donc servir de vérification l'un à l'autre. Le second, théoriquement plus simple, exige néanmoins le rabattement du plan Mpq sur xoy, puis son relèvement; et le premier peut quelquefois présenter plus d'avantages.

IV. Par exemple, on peut l'appliquer directement à

Fig. 4.



la construction des rayons de courbure principaux au point M, et par suite de l'indicatrice en ce point.

En effet, les projections des normales MC_1 et $M'C_1$ en deux points infiniment voisins d'une ligne de courbure se font sur le plan xoy suivant les droites mc_1, $m'c_1$ respectivement perpendiculaires à pq, $p'q'$, et dont l'intersection c_1 est la projection du centre de courbure C_1 qu'on se propose de déterminer.

Soient x_1, y_1 les coordonnées du point m, $x_1 + dx_1$, $y_1 + dy_1$ celles de m'. Les équations de mc_1, $m'c_1$ sont

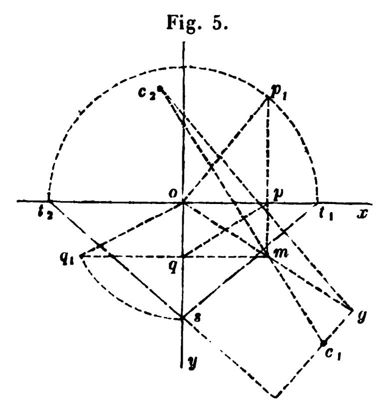
$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{x_1}{y_1}, \quad \frac{y - y_1 - dy_1}{x - x_1 - dx_1} = \frac{x_1 + dx_1}{y_1 + dy_1};$$

on en tire, quantités du second ordre omises,

$$\frac{y - 2y_1}{x - 2x_1} = \frac{dx_1}{dy_1}.$$

Cette équation montre que, si l'on prolonge om d'une quantité égale mg, gc_1 est parallèle à la normale menée au point m sur la projection de la deuxième ligne de courbure en M.

Fig. 5.



Soient donc st_1, st_2 les directions des tangentes aux courbes c_1, c_2 du point m; je tire mc_1 perpendiculaire à pq, je prolonge om d'une quantité égale mg, enfin je

mène gc_1 perpendiculaire à st_2 et gc_2 perpendiculaire à st_1 ; ces lignes coupent mc_1 en c_1 et c_2.

c_1 est la projection du centre principal de courbure C_1 répondant à la première série de lignes de courbure au point M.

c_2 est la projection du second centre de courbure principal C_2.

Les lignes de rappel menées en c_1, c_2 au plan des x, y fixent la position des points C_1, C_2 sur la normale en M au paraboloïde.

Enfin, MA, MB étant bissectrices des angles formés

Fig. 6.

par les génératrices Mp, Mq, du point M, je prends sur la première

$$MA = MA' = K\sqrt{MC_1},$$

sur la seconde

$$MB = MB' = K\sqrt{MC_2};$$

l'indicatrice complète se compose des deux hyperboles ayant Mp, Mq pour asymptotes et leurs sommets en AA', BB'.

NOTE DE TRIGONOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE;

PAR M. N. GOFFART.

Dans les *Proceedings* de la Société philosophique de Cambridge, M. Glaisher énonce et vérifie quelques for-

mules de Trigonométrie élémentaire auxquelles il est parvenu, dit-il, par l'intermédiaire des fonctions elliptiques.

Il est aisé d'en donner des démonstrations fort simples. Posons, avec M. Glaisher,

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} a' &= \tfrac{1}{2}(-a+b+c+d),\\ b' &= \tfrac{1}{2}(+a-b+c+d),\\ c' &= \tfrac{1}{2}(+a+b-c+d),\\ d' &= \tfrac{1}{2}(+a+b+c-d),\end{aligned}\right.$$

et

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} a'' &= \tfrac{1}{2}(a+b+c+d) = +\tfrac{1}{2}(a'+b'+c'+d'),\\ b'' &= \tfrac{1}{2}(a+b-c-d) = -\tfrac{1}{2}(a'+b'-c'-d'),\\ c'' &= \tfrac{1}{2}(a-b+c-d) = -\tfrac{1}{2}(a'-b'+c'-d'),\\ d'' &= \tfrac{1}{2}(a-b-c+d) = -\tfrac{1}{2}(a'-b'-c'+d').\end{aligned}\right.$$

I. Considérons en premier lieu les sommes

$$[\cos(a-b)+\cos(c-d)] \pm [\cos(a+b)+\cos(c+d)],$$
$$[\cos(a-b)-\cos(c-d)] \pm [\cos(a+b)-\cos(c+d)].$$

1° On peut écrire

$$v = \cos(a-b)+\cos(c-d)+\cos(a+b)+\cos(c+d)$$

sous l'une des deux formes

$$\begin{aligned} v &= [\cos(a-b)+\cos(a+b)] + [\cos(c-d)+\cos(c+d)]\\ &= 2(\cos a\cos b + \cos c\cos d),\\ v &= [\cos(a-b)+\cos(c+d)] + [\cos(c-d)+\cos(a+b)]\\ &= 2(\cos a'\cos b' + \cos c'\cos d'); \end{aligned}$$

d'où

$$(\alpha)\qquad \cos a\cos b + \cos c\cos d = \cos a'\cos b' + \cos c'\cos d'.$$

2° La formule

$$u = \cos(a-b)+\cos(c-d)-\cos(a+b)-\cos(c+d)$$

peut s'écrire aussi des deux manières

$$\begin{aligned} u &= [\cos(a-b)-\cos(a+b)]+[\cos(c-d)-\cos(c+d)] \\ &= 2[\sin a \sin b+\sin c \sin d], \\ u &= [\cos(a-b)-\cos(c+d)]+[\cos(c-d)-\cos(a+b)] \\ &= 2[\sin a' \sin b'+\sin c' \sin d'], \end{aligned}$$

d'où

$$(\beta) \qquad \sin a \sin b+\sin c \sin d=\sin a' \sin b'+\sin c' \sin d'.$$

Il y a évidemment trois formules analogues à (α) et à (β), et, en les ajoutant, on peut les écrire symboliquement

$$(\gamma) \qquad \left\{ \begin{aligned} \Sigma(\sin a \sin b) &= \Sigma(\sin a' \sin b'), \\ \Sigma(\cos a \cos b) &= \Sigma(\cos a' \cos b'). \end{aligned} \right.$$

3° La formule

$$v'=\cos(a-b)-\cos(c-d)+\cos(a+b)-\cos(c+d)$$

s'écrit des deux manières

$$\begin{aligned} v' &= [\cos(a-b)+\cos(a+b)]-[\cos(c-d)+\cos(c+d)] \\ &= 2(\cos a \cos b-\cos c \cos d); \\ v' &= [\cos(a-b)-\cos(c+d)]-[\cos(c-d)-\cos(a+b)] \\ &= 2(-\sin a' \sin b'+\sin c' \sin d'); \end{aligned}$$

d'où

$$(\alpha') \quad \cos a \cos b-\cos c \cos d=-\sin a' \sin b'+\sin c' \sin d'.$$

4° La formule

$$u'=\cos(a-b)-\cos(c-d)-\cos(a+b)+\cos(c+d)$$

s'écrit

$$\begin{aligned} u' &= [\cos(a-b)-\cos(a+b)]-[\cos(c-d)-\cos(c+d)] \\ &= 2(\sin a \sin b-\sin c \sin d), \\ u' &= [\cos(a-b)+\cos(c+d)]-[\cos(c-d)+\cos(a+b)] \\ &= 2(\cos a' \cos b'-\cos c' \cos d'); \end{aligned}$$

d'où

$$(\beta') \quad \sin a \sin b - \sin c \sin d = \cos a' \cos b' - \cos c' \cos d'.$$

II. Considérons en second lieu les sommes

$$W = \cos(a-b)\cos(c-d) + \cos(a+b)\cos(c+d),$$
$$W' = \cos(a-b)\cos(c+d) + \cos(a+b)\cos(c-d).$$

1° On peut écrire

$$W = \begin{vmatrix} \cos(a-b) & -\cos(a+b) \\ \cos(c+d) & \cos(c-d) \end{vmatrix}.$$

Or ce déterminant peut s'écrire de deux manières différentes en remplaçant, d'une part, les colonnes par la somme et la différence des colonnes, et, d'autre part, les lignes par la somme et la différence des lignes, ce qui donne

$$\tfrac{1}{2}W = \begin{vmatrix} \sin a \sin b & -\cos a \cos b \\ \cos c \cos d & \sin a \sin b \end{vmatrix}$$
$$= \cos a \cos b \cos c \cos d + \sin a \sin b \sin c \sin d,$$

$$\tfrac{1}{2}W = \begin{vmatrix} \cos a' \cos b' & \sin c' \sin d' \\ -\sin a' \sin b' & \cos c' \cos d' \end{vmatrix}$$
$$= \cos a' \cos b' \cos c' \cos d' + \sin a' \sin b' \sin c' \sin d';$$

d'où

$$(A)\left\{\begin{aligned} &\cos a \cos b \cos c \cos d + \sin a \sin b \sin c \sin d \\ &\quad = \cos a' \cos b' \cos c' \cos d' + \sin a' \sin b' \sin c' \cos d'. \end{aligned}\right.$$

2° La deuxième formule s'écrit de même

$$W' = \begin{vmatrix} \cos(a-b) & -\cos(a+b) \\ \cos(c-d) & \cos(c+d) \end{vmatrix}$$

et donne

$$\tfrac{1}{2}W' = \begin{vmatrix} \sin a \sin b & -\cos a \cos b \\ \cos c \cos d & -\sin c \sin d \end{vmatrix}$$
$$= \cos a \cos b \cos c \cos d - \sin a \sin b \sin c \sin d,$$

$$\tfrac{1}{2}W' = \begin{vmatrix} \cos c'' \cos d'' & \sin a'' \sin b'' \\ \sin c'' \sin d'' & \cos a'' \cos b'' \end{vmatrix}$$
$$= \cos a'' \cos b'' \cos c'' \cos d'' - \sin a'' \sin b'' \sin c'' \sin d'';$$

d'où

$$(\mathrm{A}')\ \left\{\begin{aligned}&\cos a \cos b \cos c \cos d - \sin a \sin b \sin c \sin d\\&\quad = \cos a'' \cos b'' \cos c'' \cos d'' - \sin a'' \sin b'' \sin c'' \sin d''.\end{aligned}\right.$$

Si l'on introduit au moyen des relations (2) dans (A') les a', b', c', d' au lieu des a, b, c, d, en remarquant qu'il en résulte un changement de signe pour $\sin b''$, $\sin c''$, $\sin d''$, il viendra

$$(\mathrm{A}'')\ \left\{\begin{aligned}&\cos a' \cos b' \cos c' \cos d' - \sin a' \sin b' \sin c' \sin d'\\&\quad = \cos a'' \cos b'' \cos c'' \cos d'' + \sin a'' \sin b'' \sin c'' \sin d''.\end{aligned}\right.$$

Nous pouvons écrire symboliquement ces trois formules

$$(\mathrm{A})\qquad \Pi(\cos a) + \Pi(\sin a) = \Pi(\cos a') + \Pi(\sin a'),$$

$$(\mathrm{A}')\qquad \Pi(\cos a) - \Pi(\sin a) = \Pi(\cos a'') - \Pi(\sin a''),$$

$$(\mathrm{A}'')\qquad \Pi(\cos a') - \Pi(\sin a') = \Pi(\cos a'') + \Pi(\sin a'').$$

III. Formons maintenant les sommes

$$(\mathrm{A}) - (\mathrm{A}') - (\mathrm{A}'') \quad \text{et} \quad (\mathrm{A}) + (\mathrm{A}') - (\mathrm{A}''),$$

il viendra, après réduction et transposition,

$$(\mathrm{B})\qquad \Pi(\sin a) = -\Pi(\sin a') + \Pi(\sin a''),$$

$$(\mathrm{C})\qquad \Pi(\cos a) = +\Pi(\cos a') - \Pi(\sin a''),$$

qui se développent ainsi

$$(\mathrm{B})\ \left\{\begin{aligned}&\sin a \sin b \sin c \sin d\\&\quad = \sin a' \sin b' \sin c' \sin d' + \sin a'' \sin b'' \sin c'' \sin d'',\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{C})\ \left\{\begin{aligned}&\cos a \cos b \cos c \cos d\\&\quad = \cos a' \cos b' \cos c' \cos d' - \sin a'' \sin b'' \sin c'' \sin d''.\end{aligned}\right.$$

IV. Reprenons les formules (α) et (β); élevons-les au carré et retranchons-les, en observant que

$$\cos^2 a \cos^2 b = 1 - \sin^2 a - \sin^2 b + \sin^2 a \sin^2 b.$$

Il viendra, en réduisant à l'aide de (B) et (C),

$$(\mathrm{D})\left\{\begin{array}{l}\sin^2 a+\sin^2 b+\sin^2 c+\sin^2 d\\ \quad=\sin^2 a'+\sin^2 b'+\sin^2 c'+\sin^2 d'-4\sin a''\sin b''\sin c''\sin d''\end{array}\right.$$

ou

$$(\mathrm{D})\qquad \Sigma(\sin^2 a)=\Sigma(\sin^2 a')-4\Pi(\sin a'').$$

De même, ajoutant (α) et (β'), préalablement élevées au carré, il vient

$$\begin{array}{l}2[\Pi(\cos\alpha)-\Pi(\sin\alpha)]\\ \quad=2(\cos^2\alpha'\cos^2\beta'+\cos^2 c'\cos^2 d')\\ \qquad-(\cos^2 a\cos^2 b+\cos^2 c\cos^2 d+\sin^2 a\sin^2 b+\sin^2 c\sin^2 d).\end{array}$$

Faisant de même pour (α') et (β), on a

$$\begin{array}{l}2[\Pi(\cos\alpha)-\Pi(\sin\alpha)]\\ \quad=-2(\sin^2\alpha'\sin^2\beta'+\sin^2 c'\sin^2 d')\\ \qquad+(\cos^2 a\cos^2 b+\cos^2 c\cos^2 d+\sin^2 a\sin^2 b+\sin^2 c\sin^2 d);\end{array}$$

puis, additionnant, il vient, en tenant compte de $\cos^2 x=1-\sin^2 x$,

$$(\mathrm{E})\ \Pi(\cos\alpha)-\Pi(\sin\alpha)=1-\tfrac{1}{2}(\sin^2 a'+\sin^2 b'+\sin^2 c'+\sin^2 d')$$

ou

$$(\mathrm{E})\qquad\left\{\begin{array}{l}\cos a\cos b\cos c\cos d-\sin a\sin b\sin c\sin d\\ \quad=1-\tfrac{1}{2}(\sin^2 a'+\sin^2 b'+\sin^2 c'+\sin^2 d'.\end{array}\right.$$

BIBLIOGRAPHIE.

Éléments de Mécanique, avec de nombreux exercices; par *F. I. C.* Grand in-18, avec figures dans le texte. Paris, Poussielgue frères; 1881.

Problèmes de Mécanique; par *F. I. C.* Un vol. grand in-18, avec figures dans le texte. Paris, Poussielgue frères; 1883.

Les *Éléments de Mécanique* renferment deux séries de questions proposées aux élèves : des *Exercices* placés à la suite de chaque Chapitre, et un recueil de *Problèmes* qui terminent le Livre.

Les exercices présentent les développements de la théorie exposée dans le cours, ou des questions intéressantes qui auraient par trop surchargé le Livre de l'élève. Il est bon de les proposer aux élèves intelligents et chercheurs pour lesquels le travail courant de la classe ne peut suffire.

La plupart des problèmes ont été donnés aux examens. Quelques-uns ne sont que des applications numériques des formules; ils ont pour objet de familiariser les élèves avec ces formules, de leur en faire saisir l'utilité pratique et de les habituer au calcul des effets mécaniques.

Beaucoup de questions donnent lieu à d'excellents exercices d'Algèbre et de Trigonométrie; elles remplaceraient avantageusement les calculs abstraits, qui, en général, offrent peu d'intérêt aux élèves.

Les questions de Dynamique ont été multipliées à dessein : de nombreux problèmes sur les masses, les accélérations donnent aux élèves des idées justes sur les forces et sur leurs effets.

Les *Problèmes de Mécanique* donnent les solutions de tous les problèmes proposés dans le livre des *Éléments;* ils en renferment en outre quelques autres qui paraissent devoir intéresser le lecteur, tant par leur nouveauté que par leur originalité. Un très grand nombre des *exercices* de Cinématique et de Dynamique y sont résolus; tous les exercices des *résistances passives* sont étudiés dans les *questions de frottement.* Un tableau de correspondance placé en tête du Volume facilite les recherches.

La Mécanique prend une place de plus en plus large dans les études; les progrès de l'enseignement technique l'étendent encore; de nombreux traités en exposent les principes, mais il manquait un recueil de problèmes de Mécanique élémentaire: c'est cette lacune que les auteurs ont essayé de combler.

ARPENTAGE, LEVÉ DES PLANS ET NIVELLEMENT; par *F. I. C.* Grand in-18, avec figures dans le texte; 2e édit. Paris, Poussielgue frères; 1881.

La deuxième édition de cet Ouvrage comprend trois Traités : l'*Arpentage*, le *Levé des plans* et le *Nivellement*.

L'auteur a suivi le programme des conducteurs des ponts et chaussées, mais en écartant les questions trop spéciales, telles que les formules pour le mouvement des terres, l'emploi des matériaux et l'exécution des œuvres d'art.

Les instruments ont été dessinés d'après nature, et l'auteur a indiqué avec soin la manière de les vérifier et de les employer.

Les exemples donnés, loin d'être imaginés pour les besoins de la rédaction, se sont réellement présentés dans l'exécution des travaux.

L'Ouvrage actuel est donc réellement un ouvrage de praticien; il est rempli de renseignements et contraste avec le vide de bon nombre d'ouvrages similaires.

Récréations mathématiques; par M. *Edouard Lucas.* Deux vol. petit in-8°, caractères elzévirs, titres en deux couleurs, avec figures dans le texte. Prix : 15fr sur vélin, 24fr sur hollande. Paris, Gauthier-Villars; 1883.

Tome I : Les traversées. — Les ponts. — Les labyrinthes. — Les reines. — Le solitaire. — La numération. — Le baguenaudier. — Le taquin.

Tome II : Qui perd gagne. — Les dominos. — Les marelles. — Le parquet. — Le casse-tête. — Les jeux de demoiselles. — Le jeu icosien d'Hamilton.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

Éléments de Géométrie, comprenant les notions sur les courbes usuelles et de nombreux exercices; par *F. I. C.* Grand in-18, avec figures dans le texte; 4e édit. Paris, Poussielgue frères; 1881.

Éléments de Géométrie descriptive, avec 400 exercices; par *F. I. C.* Grand in-18, avec figures dans le texte; 2e édition. Paris, Poussielgue frères; 1882.

Introduction a la théorie de l'énergie; par M. *E.*

Jouffret, chef d'escadrons d'artillerie. Petit in-8, avec figures dans le texte. Prix : 3fr,50. Paris, Gauthier-Villars; 1883.

COURS D'ANALYSE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE; par M. *C. Jordan*, membre de l'Institut. Tome II, comprenant les *Intégrales définies et indéfinies*. In-8, avec figures dans le texte. Prix : 12 fr. Paris, Gauthier-Villars; 1883.

COURS DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE, à l'usage des élèves de Mathématiques élémentaires, avec des compléments destinés aux élèves de Mathématiques spéciales; par M. *Ch. Vacquant*, inspecteur général de l'Instruction publique. Ire Partie, *Géométrie plane*, avec 370 figures dans le texte. In-8. Paris, G. Masson; 1884.

ANNUAIRE POUR L'AN 1884, publié par le *Bureau des Longitudes*, contenant les Notices suivantes : *Sur les grands fléaux de la nature : famines, inondations et déluges, volcans, tremblements de terre, tempêtes, trombes et tornados*, par M. *Faye*, membre de l'Institut; *Mission en Océanie pour l'observation de l'éclipse totale de Soleil du 6 mai* 1883, par M. *Janssen*, membre de l'Institut. In-18, de 910 pages, avec figures dans le texte et planche photoglyptique de l'éclipse totale de Soleil. Prix : 1fr,50. Paris, Gauthier-Villars; 1884.

ERRATUM AUX TABLES DE LOGARITHMES DE SCHRÖN.

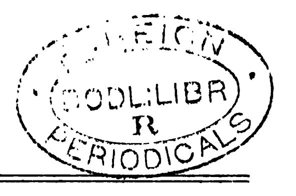
Introduction, page XIV, colonne des logarithmes $[\frac{1}{2}]_n$, ligne 8, *au lieu de*

$$\underline{1},2930986\underline{2},$$

lisez

$$\bar{1},2930986\underline{2}.$$

Cette faute a été signalée par M. Colomb.



SUR L'APPROXIMATION DES RACINES DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES;

PAR M. LAGUERRE.

1. Étant donnée une équation algébrique à coefficients réels

$$f(x) = 0,$$

désignons par λ un nombre réel arbitraire, et posons

$$f(x) = (x - \lambda) F(x) + f(\lambda).$$

$F(x)$ est un polynôme entier, et l'on voit que l'équation $f(x) = 0$ peut se mettre sous la forme

$$(1) \qquad x = \lambda - \frac{f(\lambda)}{F(x)}.$$

Supposons que nous fassions varier x dans l'intervalle compris entre deux nombres α et β, le polynôme $F(x)$ prendra toutes les valeurs possibles comprises entre deux nombres M et N, en sorte que le second membre de l'égalité (1) variera dans un intervalle déterminé AB; cet intervalle renfermant l'infini, si M et N sont de signes contraires.

Si les intervalles $\alpha\beta$ et MN n'ont aucune partie commune, il est clair que l'équation (1) n'a aucune racine comprise entre les nombres α et β; si l'intervalle $\alpha\beta$ est entièrement compris dans l'intervalle MN, nous ne pourrons tirer aucune conclusion; mais, s'ils ont seulement une partie commune, les racines de l'équation qui sont comprises entre α et β seront nécessairement comprises dans cette partie commune et, par conséquent, resserrées dans des limites plus étroites.

Cette remarque très simple peut souvent être utile pour la séparation et pour l'approximation des racines; en voici une application.

2. Soit

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n,$$

où nous supposons a_0 positif; on a, comme on le sait,

$$\mathrm{F}(x) = f_0 x^{n-1} + f_1 x^{n-2} + \ldots + f_{n-2} x + f_{n-1},$$

où

$$f_0 = a_0, \quad f_1 = f_0 \lambda + a_1,$$
$$f_2 = f_1 \lambda + a_2, \quad \ldots, \quad f_{n-1} = f_{n-2} \lambda + a_{n-1}.$$

Choisissons le nombre positif λ, de telle sorte que tous les nombres $f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}$ soient également positifs; on voit que $\mathrm{F}(x)$ sera non seulement positif, mais encore croissant pour toute valeur positive de x.

Cela posé, je distinguerai deux cas suivant que $f(\lambda)$ est négative ou positive.

3. *Premier cas :* $f(\lambda) < 0$. — L'équation a nécessairement une racine supérieure à λ; je dis qu'elle a une seule racine positive. Faisons croître en effet x depuis zéro jusqu'à $+\infty$: le premier membre de l'égalité (1) va constamment en croissant, le second membre va constamment en décroissant, puisque $f(\lambda)$ est < 0, et que la valeur positive de $\mathrm{F}(x)$ va constamment en croissant; les deux membres ne peuvent donc être égaux que pour une seule valeur de x.

Soit α un nombre positif quelconque, tel que l'on ait $f(\alpha) < 0$; si l'on fait varier x depuis α jusqu'à $+\infty$, on voit que le second membre de l'égalité (1) varie de λ à $\lambda - \frac{f(\lambda)}{\mathrm{F}(\alpha)}$; il en résulte que la racine positive de l'équa-

tion donnée est inférieure à

$$\lambda - \frac{f(\lambda)}{F(\alpha)} = \alpha - \frac{f(\alpha)}{F(\alpha)};$$

cette racine est donc comprise entre α et $\alpha - \frac{f(\alpha)}{F(\alpha)}$.

En particulier, si l'on fait $\alpha = \lambda$, on voit que le nombre $\lambda - \frac{f(\lambda)}{f'(\lambda)}$ est une limite supérieure des racines de l'équation.

4. Soit maintenant α un nombre positif, tel que l'on ait $f(\alpha) > 0$; si l'on fait varier x depuis α jusqu'à $+\infty$, on voit que le second membre de l'égalité (1) varie de λ à $\lambda - \lambda\frac{f(\lambda)}{F(\alpha)}$, et il en résulte, comme précédemment, que la racine est inférieure à

$$\lambda - \frac{f(\lambda)}{F(\alpha)} = \alpha - \frac{f(\alpha)}{F(\alpha)},$$

valeur plus approchée que la précédente, puisque $f(\alpha)$ est positif.

5. *Deuxième cas* : $f(\lambda) > 0$ [1]. — Soit α un nombre positif, tel que l'on ait $f(\alpha) < 0$, auquel cas il y a certainement une racine qui est plus grande que α.

Si l'on fait varier x depuis α jusqu'à $+\infty$, on voit que le second membre de l'égalité (1) varie de λ à

$$\lambda - \frac{f(\lambda)}{F(\alpha)} = \alpha - \frac{f(\alpha)}{F(\alpha)};$$

cette dernière quantité est plus grande que α, mais plus petite que λ; il en résulte que toutes les racines de

---

[1] C'est le cas le plus général, et l'on peut toujours déterminer un nombre positif λ satisfaisant à cette inégalité; on devra le choisir le plus petit possible.

l'équation qui sont plus grandes que α sont comprises entre $\alpha - \frac{f(\alpha)}{F(\alpha)}$ et λ.

Ainsi la formule

$$(2) \qquad \beta = \alpha - \frac{f(\alpha)}{F(\alpha)} = \lambda - \frac{f(\lambda)}{F(\alpha)} = \frac{\lambda f(\alpha) - \alpha f(\lambda)}{f(\alpha) - f(\lambda)}$$

donne une valeur de la racine immédiatement supérieure à α, valeur plus approchée que α et comme celle-ci inférieure à la racine.

En prenant pour point de départ β, on obtiendrait ainsi une suite de valeurs croissantes et approchant indéfiniment de la racine cherchée.

6. Soit α un nombre positif, tel que l'on ait $f(\alpha) > 0$. Si l'on fait varier x depuis zéro jusqu'à α, le second membre de l'égalité (1) varie de $\lambda - \frac{f(\lambda)}{F(0)}$ à

$$\lambda - \frac{f(\lambda)}{F(\alpha)} = \alpha - \frac{f(\alpha)}{F(\alpha)};$$

cette dernière quantité est plus petite que α, mais plus grande que $\lambda - \frac{f(\lambda)}{F(0)}$.

Donc toutes les racines positives de l'équation qui sont inférieures à α sont comprises (s'il en existe) entre $\lambda - \frac{f(\lambda)}{F(0)}$ et $\lambda - \frac{f(\lambda)}{F(\alpha)}$.

Ainsi la formule (2) donne une valeur de la racine immédiatement inférieure à α, valeur plus approchée que α et, comme celle-ci, supérieure à la racine.

7. D'où la proposition suivante :

Étant pris le nombre positif arbitraire α_0, formons la suite des nombres α_0, α_1, α_2, ..., d'après la loi de récurrence suivante :

$$\alpha_{i+1} = \lambda - \frac{f(\lambda)}{F(\alpha_i)};$$

si $f(\alpha_0)$ est < 0, la suite des nombres $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ converge vers la valeur de la racine qui est immédiatement supérieure à α_0.

Si $f(\alpha_0)$ est > 0 et si l'équation a une ou plusieurs racines positives inférieures à α_0, la même suite converge vers la valeur de la racine immédiatement inférieure à α_0.

Si, dans le même cas, l'équation n'a pas de racine positive inférieure à α_0, un des termes de la suite est négatif.

λ désigne ici un nombre positif quelconque rendant positives toutes les fonctions

$$f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}, f(\lambda).$$

8. La proposition contenue dans le n° 6 s'applique évidemment au cas où $\alpha = \lambda$; on voit ainsi que

$$\lambda - \frac{f(\lambda)}{f'(\lambda)}$$

est une limite supérieure des racines de l'équation.

En comparant ce résultat avec celui que j'ai obtenu plus haut (n° 3), on peut énoncer la proposition suivante :

Si λ est un nombre positif qui rend positives toutes les fonctions

$$f_0, f_1, f_2, \ldots, f_{n-1},$$

le nombre

$$\lambda - \frac{f(\lambda)}{f'(\lambda)}$$

est une limite supérieure des racines de l'équation.

La méthode qui résulte de ce théorème est d'une application plus facile que celle de Newton et donne souvent une limite plus rapprochée; je ferai remarquer

toutefois que si le nombre $\lambda - \frac{f(\lambda)}{f'(\lambda)}$ était négatif, on devrait le remplacer par zéro.

La méthode de Newton est donc toujours plus avantageuse toutes les fois qu'elle conduit à une limite négative.

SUR UNE QUESTION DE PROBABILITÉ;

PAR M. ÉMILE LEMOINE,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

Soit un triangle ABC; *par un point* O, *pris au hasard à l'intérieur de* ABC, *on mène une parallèle à*

BC	*qui coupe*	AC	*en*	A_c	*et*	AB	*en* A_b,
CA	»	BA	*en*	B_a	*et*	BC	*en* B_c,
AB	»	CB	*en*	C_b	*et*	CA	*en* C_a.

Quelle est la probabilité que l'on puisse former :

1° *Un triangle;*

2° *Un triangle acutangle, avec les trois droites* OA_c, OB_a, OC_b.

Désignons OC_b par ξ, OA_c par η, OB_a par ζ.

Pour que l'on puisse former un triangle avec ces trois droites, il faut que l'on ait

$$\xi < \eta + \zeta,$$
$$\eta < \xi + \zeta,$$
$$\zeta < \eta + \xi;$$

désignons par x et y les coordonnées de O, CB étant pris pour axe des x, CA pour axe des y, il est facile de voir

que l'on a

$$\xi = \frac{cy}{b},$$
$$\eta = x,$$
$$\zeta = \frac{ab - bx - ay}{a}.$$

Si l'on considère : 1° le lieu des points pour lesquels on a

$$\xi = \eta + \zeta,$$

on trouve la droite

$$\frac{cy}{b} = x + \frac{ab - bx - ay}{a};$$

2° le lieu des points pour lesquels on a

$$\eta = \xi + \zeta,$$

on trouve la droite

$$x = \frac{cy}{b} + \frac{ab - bx - ay}{a};$$

3° le lieu des points pour lesquels on a

$$\zeta = \xi + \eta,$$

on trouve la droite

$$\frac{ab - bx - ay}{a} = x + \frac{cy}{b};$$

ou

$$(1) \qquad \frac{x}{\frac{ab}{b-a}} + \frac{y}{\frac{b^2}{c+b}} = 1,$$

$$(2) \qquad \frac{x}{\frac{ab}{a+b}} + \frac{y}{\frac{b^2}{b-c}} = 1,$$

$$(3) \qquad \frac{x}{\frac{ab}{a+b}} + \frac{y}{\frac{b^2}{b+c}} = 1;$$

(2) et (3) se coupent sur CB en A', et l'on a

$$\text{CA}' = \frac{ab}{a+b}, \quad \text{A}'\text{B} = \frac{a^2}{a+b};$$

(1) et (3) se coupent sur CA en B', et l'on a

$$\mathrm{CB}' = \frac{b^2}{c+b}, \quad \mathrm{B'A} = \frac{bc}{c+b};$$

(1) et (2) se coupent sur AB en C', et l'on a

$$\mathrm{BC}' = \frac{ac}{a+c}, \quad \mathrm{C'A} = \frac{c^2}{a+c}.$$

Remarquons en passant que les trois droites AA', BB', CC' se coupent en un même point O' dont les coordonnées sont

$$x = \frac{abc}{ab+cb+ac},$$
$$y = \frac{ab^2}{ab+cb+ac};$$

pour ce point O', on a

$$\xi = \eta = \zeta :$$

c'est le point étudié par M. Jérabek (voir *Mathesis*, 1re année, p. 191).

Les trois lieux dérivés des égalités

$$\xi = \eta + \zeta, \quad \eta = \xi + \zeta, \quad \zeta = \eta + \xi$$

forment donc par leurs intersections le triangle A'B'C' inscrit dans ABC et, comme chacun d'eux, $\xi = \eta + \zeta$ par exemple, sépare les points du plan pour lesquels on a

$$\xi > \eta + \zeta$$

de ceux pour lesquels on a

$$\xi < \eta + \zeta,$$

il est évident que, pour tous les points intérieurs au triangle A'B'C', on a

$$\xi < \eta + \zeta,$$
$$\eta < \xi + \zeta,$$
$$\zeta < \eta + \xi,$$

c'est-à-dire que pour ces points on peut former un triangle avec ξ, η, ζ, et la probabilité cherchée sera

$$\frac{\text{aire A'B'C'}}{\text{aire ABC}}$$

ou

$$\frac{S - CA'B' - BA'C' - AB'C'}{S};$$

mais

$$AB'C' = S\frac{c^2}{(c+b)(c+a)},$$

$$BA'C' = S\frac{a^2}{(a+c)(a+b)},$$

$$CA'B' = S\frac{b^2}{(a+b)(c+b)};$$

donc la probabilité est

$$\frac{2abc}{(b+c)(a+c)(a+b)}.$$

Si l'on s'était proposé de trouver la probabilité pour que l'on puisse former un triangle avec OB_c, OC_a, OA_b, on aurait trouvé le même résultat et l'on aurait eu à considérer un triangle $A_1B_1C_1$ inscrit dans ABC et tel que les droites AA_1, BB_1, CC_1 se coupent au second point étudié par M. Jérabek (voir *loc. cit.*).

Voici une autre solution de la même question.

Il est facile d'établir que, pour tout point du triangle ABC, on a entre les droites ξ, η, ζ la relation

(1) $$ab\xi + bc\eta + ac\zeta = abc.$$

Cela posé, considérons trois axes rectangulaires $O\xi, O\eta, O\zeta$; le plan dont l'équation est représentée par (1) coupera $O\xi$ en A_2, $O\eta$ en B_2, $O\zeta$ en C_2, et l'on aura

$$OA_2 = c, \quad OC_2 = b, \quad OB_2 = a.$$

Les trois plans

$$\xi = \eta + \zeta,$$
$$\eta = \xi + \zeta,$$
$$\zeta = \xi + \eta$$

se couperont deux à deux en A'_1 sur B_2C_2, B'_1 sur A_2C_2, C'_1 sur A_2B_2, tels que

OA'_1 est la bissectrice de C_2OB_2,
OB'_1 » A_2OC_2,
OC'_1 » B_2OA_2,

et, pour tous les points situés à l'intérieur de $A'_1B'_1C'_1$, on aura

$$\xi < \eta + \zeta,$$
$$\eta < \zeta + \xi,$$
$$\zeta < \xi + \eta.$$

Or, comme à un point de l'intérieur du triangle donné ABC donnant les droites ξ, η, ζ correspond un seul point de l'intérieur de $A_2B_2C_2$ ayant pour coordonnées ξ, η, ζ et réciproquement, la probabilité cherchée sera évidemment

$$\frac{\text{aire } A'_1B'_1C'_1}{\text{aire } A_2B_2C_2}:$$

il est inutile de développer les calculs.

Remarque. — On peut prendre ξ, η, ζ avec la relation

$$ab\xi + bc\eta + ac\zeta = abc,$$

ou ξ_1, η_1, ζ_1, avec la relation

$$ac\xi_1 + ba\eta_1 + cb\zeta_1 = abc,$$

pour coordonnées d'un point du plan du triangle ABC; comme de plus on a

$$\xi = \frac{cy}{b}, \qquad \xi_1 = y,$$

$$\eta = x, \qquad \eta_1 = \frac{cx}{a},$$

$$\zeta = \frac{ab - bx - ay}{a}; \quad \zeta_1 = \frac{ab - bx - ay}{b},$$

il en résulte que toute relation entre ξ, η, ζ ou ξ_1, η_1, ζ_1 donne une relation du même degré entre x et y.

Ainsi les lieux des points tels que

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \text{const.},$$

tels que

$$\xi\xi_1 + \eta\eta_1 + \zeta\zeta_1 = \text{const.},$$

tels que

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2,$$

etc., sont des coniques; tels que

$$\xi + \eta + \zeta = \text{const.},$$
$$\xi + \eta + \zeta + \xi_1 + \eta_1 + \zeta_1 = \text{const.},$$

etc., sont des droites.

Il en résulte encore que, pour tout point du plan de ABC, on a

$$\xi\eta\zeta = \xi_1\eta_1\zeta_1.$$

Remarquons aussi que l'on retrouve facilement ainsi le point pour lequel les six points A_c, A_b, B_a, B_c, C_b, C_a sont sur une même circonférence, point que nous avons démontré (voir *Nouvelles Annales*, p. 365, 3°; 1873) être le centre des médianes antiparallèles, en exprimant que l'on a

$$\xi\eta_1 = \zeta\xi_1 = \eta\zeta_1;$$

on trouve que cette valeur commune est

$$\frac{a^2 b^2 c^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}.$$

Citons enfin le théorème suivant que l'on obtient en cherchant le point pour lequel on a

$$\xi\xi_1 = \eta\eta_1 = \zeta\zeta_1.$$

Si l'on divise chaque côté d'un triangle en deux segments proportionnels aux racines carrées des côtés adjacents et que l'on joigne ce point au sommet opposé,

la ligne droite obtenue passe par le point tel que le produit des deux distances de ce point à un côté, distances comptées parallèlement aux deux autres côtés, est constant.

Occupons-nous de la seconde partie de l'énoncé : pour que le triangle formé avec ξ, η, ζ soit rectangle, il faut que l'on ait

$$\xi^2 < \eta^2 + \zeta^2,$$
$$\eta^2 < \xi^2 + \zeta^2,$$
$$\zeta^2 < \xi^2 + \eta^2.$$

Considérons l'équation

$$\zeta^2 = \xi^2 + \eta^2$$

ou, en coordonnées trilinéaires,

$$\frac{\alpha^2}{b^2} + \frac{\beta^2}{c^2} = \frac{\gamma^2}{a^2};$$

elle représente une conique qui coupe CB en A′ et y est tangente à la droite AA′, qui coupe CA en B′ et y est tangente à la droite BB′, et il est facile de voir qu'une même branche de courbe (dans le cas où la courbe est une hyperbole) passe en A′ et en B′ : cette conique sépare les points du plan pour lesquels on a

$$\xi^2 > \eta^2 + \zeta^2$$

de ceux pour lesquels on a

$$\xi^2 < \eta^2 + \zeta^2.$$

On verrait de même que $\eta^2 = \xi^2 + \zeta^2$ représente une conique qui coupe CB en A′, BA en C′ et est tangente en ces points aux droites AA′, CC′, ..., de sorte qu'il y a un triangle curviligne ayant pour sommets A′, B′, C′ et pour côtés trois arcs de coniques tangentes entre elles deux à deux en ces sommets. On voit que, pour tous les points

situés à l'intérieur de ce triangle curviligne, le triangle formé avec les droites ξ, η, ζ est acutangle.

La surface de ce triangle curviligne est égale à la surface du triangle rectiligne $A'B'C'$ diminuée des trois segments compris entre les côtés de $A'B'C'$ et les coniques dont les côtés sont des cordes : elle peut donc être facilement calculée.

Pour résoudre la même question en employant la seconde solution, on remarquerait que les trois cônes

$$\xi^2 = \eta^2 + \zeta^2, \quad \eta^2 = \zeta^2 + \xi^2, \quad \zeta^2 = \xi^2 + \eta^2$$

déterminent sur $A_2B_2C_2$ un triangle curviligne $A'_1B'_1C'_1$ dont les côtés, intersections des cônes avec le plan $A_2B_2C_2$, sont tangents entre eux deux à deux en A'_1, B'_1, C'_1, ...

En résumé :

1° La probabilité de pouvoir former un triangle avec ξ, η, ζ est

$$\frac{\text{aire du triangle rectiligne } A'B'C'}{\text{aire de } ABC} = \frac{\text{aire du triangle rectiligne } A'_1B'_1C'_1}{\text{aire de } A_2B_2C_2} = \frac{2abc}{(b+c)(a+c)(a+b)};$$

2° La probabilité d'avoir un triangle acutangle est

$$\frac{\text{aire du triangle curviligne } A'B'C'}{\text{aire de } ABC} = \frac{\text{aire du triangle curviligne } A'_1B'_1C'_1}{\text{aire de } A_2B_2C_2};$$

3° La probabilité, si l'on a un triangle, qu'il soit acutangle est

$$\frac{\text{aire du triangle curviligne } A'B'C'}{\text{aire du triangle rectiligne } A'B'C'} = \frac{\text{aire du triangle curviligne } A'_1B'_1C'_1}{\text{aire du triangle rectiligne } A'_1B'_1C'_1}.$$

Lorsque ABC est équilatéral, on trouve pour ces trois probabilités les nombres

$$\frac{1}{4}, \quad \log 8 - 2 = 0,0794415\ldots, \quad 4(\log 8 - 2) = 0,297766\ldots,$$

et il est facile de voir que, dans ce cas particulier, le problème revient au problème déjà traité (voir *Bulletin de la Société mathématique*, 1[re] année, p. 39; 11[e] année, p. 13) :

On brise une barre en trois morceaux, quelle est la probabilité que l'on puisse, avec ces trois morceaux, former : 1° un triangle, 2° un triangle acutangle.

DISTANCE DE LA TERRE A LA LUNE;

Par M. C. BERTRAND, de Grenoble.

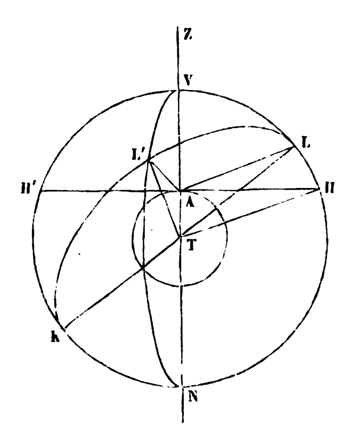
On sait que, vers le milieu du XVIII[e] siècle, les deux astronomes Lalande et La Caille, installés à Dantzig et au Cap de Bonne-Espérance, parvinrent à déterminer pour notre satellite une parallaxe horizontale de 58′ et, par suite, une distance de 96 000 lieues, en moyenne.

Nous nous proposons ici de suivre une méthode *inverse*, en déterminant d'abord la distance, pour en déduire la parallaxe.

Théorème. — *On peut déterminer la distance* TL *du centre* T *de la Terre au centre* L *de la Lune, en observant celle-ci d'une* seule et même *station* A; *et, par suite, en déduire la parallaxe horizontale* AHT *de notre satellite.*

En effet, soit LL′K la trajectoire apparente *diurne* que

la Lune paraît décrire par suite de son mouvement propre combiné avec le mouvement diurne de la sphère étoilée. Soient HH′ l'horizon de l'observateur et TZ la verticale de sa station; et admettons qu'il fonctionne pendant la



pleine lune, une première fois quand la Lune est en L, une heure environ après le lever du satellite, puis une seconde fois cinq ou six heures après, quand la Lune est en L′.

L'observation lui fournit les deux distances zénithales ZAL $= z$ et ZAL′ $= z'$, ainsi que les deux diamètres apparents de la Lune, savoir : δ pour L, et δ' pour L′. Ajoutons à ces quatre données le rayon déjà connu TA de la Terre, savoir $r = 6366^{\text{km}}$.

Appelons x le rayon visuel inconnu AL, et y le rayon visuel AL′; ces deux inconnues auxiliaires vont nous aider à calculer l'inconnue principale TL $=$ R que nous cherchons.

Le théorème connu des diamètres apparents nous fournit d'abord

$$\frac{x}{y} = \frac{\delta'}{\delta}. \tag{1}$$

De plus, en appliquant le *théorème des trois carrés* au triangle TAL, on obtient

$$(2) \qquad R^2 = r^2 + x^2 + 2rx\cos z,$$

et, en l'appliquant au triangle TAL', on obtient l'équation

$$(3) \qquad R^2 = r^2 + y^2 + 2ry\cos z'.$$

Ce système de trois équations aux trois inconnues x, y et z fera connaître R; ce qui démontre le théorème annoncé.

Scolie. — En opérant avec des instruments convenables pendant la pleine lune, on peut trouver $380\,000^{km}$ pour la distance moyenne cherchée, et, par suite, une parallaxe horizontale de $57'30''$, avec un écart d'environ $3'$ en plus et en moins; ce qui suffit dans ce genre d'observations astronomiques.

SUR LA CONDITION POUR QU'UN POLYGONE SOIT INSCRIT ET CIRCONSCRIT A DEUX CONIQUES;

Par M. WEILL.

Je me propose de donner une solution élémentaire de ce problème célèbre, qui consiste à chercher la condition pour qu'il existe un polygone d'un nombre donné de côtés, qui soit inscrit à une conique donnée et circonscrit à une autre conique donnée; on sait que, dans ce cas, il existe une infinité de polygones de ce nombre de côtés, jouissant de la même propriété. Je considère les polygones du système qui sont *infiniment aplatis*.

Premier cas. — Le polygone a un nombre pair de côtés.

Le polygone est inscrit dans la conique U et circonscrit à la conique V, ces deux coniques ayant respectivement pour équations

$$\alpha\beta - \gamma(A\alpha + B\beta + C\gamma) = 0,$$
$$L\alpha\beta - K\gamma^2 = 0.$$

Au point A, commun aux deux coniques, menons à la conique V la tangente qui rencontre la conique U en un second point C; du point C menons à la conique V la seconde tangente qui déterminera sur la conique U un point D, et ainsi de suite. Si, après p opérations, on arrive à un point B commun aux deux coniques, il existera un polygone *infiniment aplati*, de $2p$ côtés, AC, CD, DE, ..., LB, BL, ..., DC, CA, qui sera inscrit dans la conique U et circonscrit à la conique V: donc, en exprimant que la ligne qui part du point A aboutit au point B après p opérations, nous aurons écrit la condition cherchée pour un polygone de $2p$ côtés. Cela posé, cherchons l'équation de la conique à laquelle sont tangents les côtés de la ligne polygonale qui part du point A pour arriver au point B, en passant par les points de contact de la ligne ACD ... B avec la conique V.

En appelant l un paramètre, un point de la conique V est à l'intersection des deux droites

$$\alpha = l\frac{K}{L}\gamma, \quad \beta = \frac{\gamma}{l}.$$

La droite qui joint deux points l, l' a pour équation

$$L\alpha + K\beta\, ll' - 2K\gamma(l + l') = 0.$$

En identifiant cette équation avec celle de la polaire d'un point $(\alpha', \beta', \gamma')$ de la conique U par rapport à la

conique V, on a

$$\beta' = 1, \quad \alpha' = \frac{K}{L} l l', \quad \gamma' = \frac{l + l'}{2}.$$

Donc la relation entre l et l' est

$$(1) \qquad -\frac{K}{L} l l' + \frac{l + l'}{2} \left(A \frac{K}{L} l l' + B + C \frac{l + l'}{2} \right) = 0.$$

Cette relation a lieu entre les paramètres l et l' de deux points *consécutifs* de la ligne polygonale dont nous cherchons l'enveloppe. Cette ligne, qui part de A pour arriver en B, a p sommets, et les valeurs du paramètre l, qui correspondent à ces p sommets, sont

$$l_1, \quad l_2, \quad \ldots, \quad l_p.$$

On a

$$l_1 = 0, \quad l_p = \infty.$$

Dans l'équation (1), faisons $l = 0$, nous aurons pour l' deux valeurs : l'une 0 qui est à rejeter; l'autre est

$$l_2 = \frac{-2B}{C}.$$

Cherchons l_3. Il faut, dans l'équation (1), remplacer l' par la valeur que nous venons de trouver pour l_2, et l'équation du second degré en l donnera l_1 et l_3. Il faut trouver une loi de récurrence. Écrivons l'équation (1) sous la forme

$$M(l + l')^2 + P l l'(l + l') + Q(l + l') + R l l' = 0$$

ou bien

$$(3) \; l^2(M + P l') + l[P l'^2 + l'(2M + R) + Q] + M l'^2 + Q l' = 0.$$

Si l' représente l_3 dans cette équation, les deux valeurs de l seront l_2 et l_4, et l'on aura

$$l_2 l_4(M + P l_3) - M l_3^2 - Q l_3 = 0,$$
$$(l_2 + l_4)(M + P l_3) + P l_3^2 + (2M + R) l_3 + Q = 0.$$

Éliminons l_3^2, il vient

$$(4)\quad \left\{ \begin{array}{l} l_4(M+Pl_3)(M+Pl_2) \\ \quad + Ml_2(M+Pl_3)+(2M^2+RM-PQ)l_3+MQ=0. \end{array} \right.$$

Pour que la ligne polygonale arrive au point B, il faut que l'on ait

$$l_p=\infty,$$

c'est-à-dire que le coefficient de l^2 dans l'équation (3) soit nul, ou enfin que l'on ait

$$M+Pl_{p-1}=0.$$

Ainsi, pour un quadrilatère, on aura

$$l_2=\infty, \quad \text{d'où} \quad C=0.$$

Pour un hexagone $M+Pl_2=0$, d'où $MC-2BP=0$.
Posons

$$M+Pl_2=H_1,$$
$$M+Pl_3=H_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

La relation (4) peut s'écrire alors

$$H_1H_2H_3+H_2S+T=0,$$

en désignant par S et T des constantes. On aura, en général,

$$H_nH_{n+1}H_{n+2}+H_{n+1}S+T=0.$$

En égalant H_n à zéro, on aura, entre ABCKL, la relation cherchée correspondant à un polygone de $(2n+4)$ côtés. Reste à exprimer, en fonction de ces données, les quantités S, T, H_1 et H_2. On trouve

$$S=\frac{C^2}{16}-\frac{K}{4L}(AB+C),$$

$$T=\frac{C}{8}\left(\frac{ABK}{L}-\frac{C^2}{4}+\frac{CK}{2L}\right),$$

$$H_1=\frac{C^2L-4ABK}{4CL},$$

$$H_2=\frac{C^2L+4ABK}{4CL}-\frac{4ABK^2}{L(C^2L-4ABK)}.$$

Les calculs précédents supposent connue une sécante commune aux deux coniques données; pour exprimer la même condition à l'aide des invariants $\theta, \theta', \ldots$, il suffit de former l'équation en λ des deux coniques U et V, on trouve

$$(5) \qquad K = \frac{\Delta}{L^2}, \quad C = \frac{\theta - \frac{2\Delta}{L}}{L^2}, \quad AB = \Delta' - \frac{\theta - \frac{2\Delta}{L}}{L^2};$$

$$(6) \qquad \Delta' L^3 - \theta' L^2 + \theta L - \Delta = 0.$$

Ayant $H_n = 0$, avec les notations précédentes, il restera à éliminer L entre l'équation (6) et l'équation $H_n = 0$, après qu'on y aura remplacé AB, C, K en fonction de L et des invariants.

Si l_2, l_3, l_4 sont les paramètres de trois sommets consécutifs de la ligne polygonale considérée, on a

$$l_2 l_4 = \frac{M l_3^2 + Q l_3}{M + P l_3},$$

$$l_2 + l_4 = -\frac{P l_3^2 + (2M + R) l_3 + Q}{M + P l_3}.$$

Or la droite qui joint les points l_2, l_4 a pour équation

$$L\alpha + \beta K l_2 l_4 - 2\gamma K(l_2 + l_4) = 0.$$

Si l'on remplace dans cette équation $l_2 l_4$ et $l_2 + l_4$ par leurs valeurs en fonction de l_3, on aura facilement l'équation de l'enveloppe des droites qui joignent de deux en deux les sommets de notre ligne polygonale; cette enveloppe est une conique, comme on le sait. On obtiendrait, mais par des calculs de plus en plus compliqués, la conique enveloppe des droites qui joignent de trois en trois, de quatre en quatre, les sommets de la ligne polygonale.

Deuxième cas. — Le polygone a un nombre impair de côtés.

Il est inscrit dans la conique U et circonscrit à la conique V, lesquelles ont pour équations

$$\alpha\beta - \gamma^2 = 0, \quad (A\alpha + B\gamma)^2 - 2\beta(m\gamma - \alpha) = 0.$$

Un point de la première conique sera à l'intersection des deux droites

$$\beta = \gamma t, \quad \alpha = \frac{\gamma}{t}.$$

Au point A, commun aux deux coniques, menons à la conique V la tangente qui est

$$m\gamma - \alpha = 0.$$

Cette tangente rencontrera la conique U en un point t_2. De ce point, menons à la conique V une tangente qui déterminera sur la conique U un point t_3, et ainsi de suite. Si le point t_p ainsi obtenu se trouve au point B où la droite γ rencontre la droite β et la conique U, c'est que l'on pourra inscrire et circonscrire aux deux coniques un polygone *infiniment aplati* de $(2p - 1)$ côtés; on aura

$$t_1 = \infty, \quad t_p = 0.$$

Par un point t de la conique U, menons les deux tangentes à la conique V, la corde de contact aura pour équation

$$(1) \quad \frac{A(A\alpha + B\gamma) + \beta}{t} - t(m\gamma - \alpha) + B(A\alpha + B\gamma) - m\beta = 0.$$

Un point de la conique V est à l'intersection des droites

$$A\alpha + B\gamma = 2\lambda(m\gamma - \alpha), \quad A\alpha + B\gamma = \frac{\beta}{\lambda}.$$

L'équation (1) donne alors entre t et λ la relation

$$(2) \qquad \lambda^2(1 - mt) + \lambda(A + Bt) - \frac{t^2}{2} = 0,$$

$$(3) \qquad \frac{t^2}{2} + t(\lambda^2 m - \lambda B) - (\lambda A + \lambda^2) = 0.$$

On a

$$t_1 = \infty, \quad \lambda_1 = \infty, \quad t_2 = \frac{1}{m}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2m(Am+B)};$$
$$t_p = 0, \quad \lambda_p = 0, \quad \lambda_{p-1} = -A.$$

En général, on a

$$\lambda_k \lambda_{k-1} = \frac{-t_k^2}{2(1-mt_k)},$$
$$\lambda_k + \lambda_{k-1} = \frac{-(A+Bt_k)}{1-mt_k}.$$

En éliminant t_k, il vient, en posant $Am + B = C$,

$$(\lambda_{k-1} + \lambda_k + A)^2 + 2BC\lambda_k\lambda_{k-1} - 2mC\lambda_k\lambda_{k-1}(\lambda_k + \lambda_{k-1}) = 0,$$
$$(\lambda_k + \lambda_{k+1} + A)^2 + \ldots = 0,$$
$$\lambda_{k-1} + \lambda_k + \lambda_{k-1} + A$$
$$- 2mC\lambda_k(\lambda_{k-1} + \lambda_k + \lambda_{k-1}) + \lambda_k(1 + 2BC) = 0.$$

Posons

$$\lambda_k = H_k + \frac{1}{2mC},$$

il vient

$$H_k + H_{k+1} + H_{k+2} + \frac{\alpha}{H_{k+1}} + \beta = 0.$$

Cette formule de récurrence est la même que dans le cas des polygones d'un nombre pair de côtés. En effet, dans ce cas, nous avons trouvé

$$H_n H_{n+1} H_{n+2} + SH_{n+1} + T = 0;$$

on en déduit

$$H_{n+1} H_{n+2} H_{n+3} + SH_{n+2} + T = 0,$$

d'où

$$H_n - H_{n+3} = S\left(\frac{1}{H_{n+1}} - \frac{1}{H_{n+2}}\right),$$

par suite

$$H_2 + H_3 + H_4 - (H_{n+1} + H_{n+2} + H_{n+3}) = S\left(\frac{1}{H_3} - \frac{1}{H_{n+2}}\right),$$

ou enfin

$$H_{n+1} + H_{n+2} + H_{n+3} + \frac{-S}{H_{n+2}} + \left(\frac{S}{H_3} - H_2 - H_3 - H_4\right) = 0,$$

ce qui démontre l'identité des deux formules de récurrence.

Revenons aux polygones d'un nombre impair de côtés.

La condition pour un polygone de $(2p-1)$ côtés s'exprimera par $\lambda_p = 0$, c'est-à-dire par

$$H_p = \frac{-1}{2m(Am+B)}.$$

Les constantes α et β ont pour valeurs

$$\alpha = \frac{1+2(Am+B)^2}{-4m^2(Am+B)^2}, \quad \beta = \frac{1-B(Am+B)}{m(Am+B)},$$

$$H_2 = 0,$$

$$-H_3 = \frac{[1+2m(Am+B)]^2 + 1 + 2mA(Am+B) + 2(Am+B)^2}{2m(Am+B)[1+2mA(Am+B)+2(Am+B)^2]},$$

$$\lambda_3 = \frac{[1+2m(Am+B)]^2}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}.$$

Pour un triangle, le système des deux coniques est

$$\alpha\beta - \gamma^2 = 0, \quad (A\alpha + B\gamma)^2 - 2\beta\gamma = 0.$$

Pour un pentagone,

$$\alpha\beta - \gamma^2 = 0, \quad \left(A\alpha - \gamma\,\frac{1+2Am^2}{2m}\right)^2 - 2\beta(m\gamma - \alpha) = 0.$$

Pour un quadrilatère, en revenant au premier cas, on trouve que le système des coniques U et V est représenté par

$$\alpha\beta - \gamma(A\alpha + B\beta) = 0,$$
$$L\alpha\beta - K\gamma^2 = 0.$$

Pour un hexagone, le système est

$$\alpha\beta - \gamma(A\alpha + B\beta + C\gamma) = 0.$$
$$4AB\alpha\beta - C^2\gamma^2 = 0.$$

Pour un octogone, le système est

$$\alpha\beta - \gamma(A\alpha + B\beta + C\gamma) = 0,$$
$$4(\sqrt{A^2B^2 + ABC})\alpha\beta - C^2\gamma^2 = 0.$$

On obtient les cas particuliers en donnant, dans les formules précédentes, des valeurs particulières aux coefficients ainsi qu'aux fonctions linéaires α, β, γ.

SUR LE CERCLE QUI A POUR DIAMÈTRE UNE CORDE D'UNE CONIQUE A CENTRE;

PAR M. WEILL.

Théorème. — *Étant donnée une conique dont le centre est en* O, *si l'on décrit, sur une corde* AB *de cette conique, comme diamètre, un cercle qui rencontre la conique en deux autres points* C *et* D, *le rapport des distances du point* O *aux deux points* P *et* Q *où les deux droites* AB *et* CD *rencontrent le grand axe reste constant et égal à* $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$.

L'équation d'un cercle passant par les points de rencontre de l'ellipse et de deux droites peut s'écrire

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 + 2(px + qy + k)(px - qy + k') = 0,$$

avec la condition

$$b^2 + 2p^2 = a^2 - 2q^2.$$

Écrivons que le centre du cercle est sur la première droite, les trois équations

$$px + qy + k = 0,$$
$$a^2py - b^2qx = 0,$$
$$b^2x + p(px - qy + k') = 0$$

seront satisfaites simultanément, et l'élimination de x et y donne

$$\frac{k}{k'} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}.$$

Le théorème est démontré.

Si la conique donnée est une hyperbole équilatère, on voit que la corde CD passe par le centre, propriété bien connue.

Supposons que la corde AB varie en enveloppant une certaine courbe, la corde CD enveloppera une courbe semblable et qui sera symétrique d'une courbe homothétique à l'enveloppe de AB. Désignons par l et m les distances du point O aux points L, M, où la droite AB rencontre les axes de la conique donnée. Les équations de AB et CD seront

$$\frac{x}{l} + \frac{y}{m} - 1 = 0,$$

$$\frac{x}{l} - \frac{y}{m} - \text{H} = 0,$$

H étant une constante.

Si l'équation tangentielle de l'enveloppe de AB est

$$f(l, m) = 0,$$

le lieu du point S de rencontre de AB et CD aura pour équation

$$f\left(\frac{2x}{\text{H}+1}, \frac{2y}{1-\text{H}}\right) = 0.$$

On a ainsi une relation très simple entre l'enveloppe de AB et le lieu de S, et l'on peut passer immédiatement de l'une des courbes à l'autre. On peut examiner des cas particuliers intéressants, tels que celui où AB passe par un point fixe, et celui où AB enveloppe une conique.

On peut déduire facilement du lieu décrit par le point S le lieu décrit par le centre du cercle, et l'équation de

l'enveloppe du cercle; en effet, en posant

$$\frac{1}{l}=\lambda,\quad \frac{1}{m}=\mu,$$

l'équation du cercle est

$$\left(\frac{a^2\lambda^2+\mu^2 b^2}{a^2-b^2}\right)(x^2+y^2)-\lambda x(1+H)$$
$$+\mu y(1-H)+H-\frac{a^2 b^2}{a^2-b^2}(\lambda^2+\mu^2)=0.$$

Si, par exemple, AB passe par un point fixe, le cercle enveloppe une anallagmatique du quatrième degré.

SUR UN CAS PARTICULIER DE RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES A COEFFICIENTS CONSTANTS;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE,
Élève ingénieur des Ponts et Chaussées.

Le cas particulier que vise la présente Note est celui de l'équation

$$\frac{d^n y}{dx_n}+A_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+A_{n-1}\frac{dy}{dx}+A_n y=e^{ax},$$

lorsque a est racine d'un certain degré de multiplicité p de l'équation

$$\varphi(\alpha)=\alpha^n+A_1\alpha^{n-1}+\ldots+A_{n-1}\alpha+A_n=0.$$

Quand cette circonstance se présente, la méthode générale, qui consiste à transformer l'équation en posant

$$y=Ce^{ax},$$

ne s'applique plus; on a recours à des procédés spéciaux.

Dans son *Cours d'Analyse,* professé à l'École Polytechnique (feuilles lithographiées, 1re division, 1881-82, p. 170), M. J. Bertrand traite deux exemples spéciaux du cas présent par des méthodes fort ingénieuses, mais qui ne sont pas générales.

Nous nous sommes posé le problème dans ses termes généraux, et l'on va voir qu'il n'est pas besoin de recourir à ces ingénieux mais difficiles procédés de calcul, grâce au théorème qui suit :

Théorème. — *Si a est une racine d'ordre de multiplicité p de l'équation*

$$\varphi(\alpha) = \alpha^n + A_1\alpha^{n-1} + \ldots + A_{n-1}\alpha + A_n = 0,$$

l'équation différentielle linéaire

$$\frac{d^n y}{dx^n} + A_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + A_{n-1}\frac{dy}{dx} A_n y = e^{ax},$$

admet la solution particulière $\dfrac{x^p e^{ax}}{\varphi^p(a)}$.

La démonstration de ce théorème est immédiate. Dans le premier membre de l'équation différentielle, substituons $y = e^{ax}$; il vient l'identité

$$\frac{d^n e^{ax}}{dx^n} + A_1\frac{d^{n-1}e^{ax}}{dx^{n-1}} + \ldots + A_{n-1}\frac{de^{ax}}{dx} + A_n e^{ax} = e^{ax}\varphi(a).$$

Dérivons p fois les deux membres de cette identité par rapport à a, et remarquons que $\varphi(a)$, $\varphi'(a)$, ..., $\varphi^{p-1}(a)$ sont nuls; nous aurons

$$\frac{d^n x^p e^{ax}}{dx^n} + A_1\frac{d^{n-1}x^p e^{ax}}{dx^{n-1}} + \ldots$$
$$+ A_{n-1}\frac{dx^p e^{ax}}{dx} + A_n x^p e^{ax} = e^{ax}\varphi^p(a)$$

ou

$$\frac{d^n\left[\frac{x^p e^{ax}}{\varphi^p(a)}\right]}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1}\left[\frac{x^p e^{ax}}{\varphi^p(a)}\right]}{dx^{n-1}} + \ldots$$
$$+ A_{n-1} \frac{d\left[\frac{x^p e^{ax}}{\varphi^p(a)}\right]}{dx} + A_n \frac{x^p e^{ax}}{\varphi^p(a)} = e^{ax},$$

ce qui montre bien que $\frac{x^p e^{ax}}{\varphi^p(a)}$ est une solution particulière de l'équation.

Soit, par exemple, l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = e^x,$$

traitée par M. Bertrand à l'endroit cité.

1 est racine double de l'équation

$$\alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0.$$

D'après le théorème précédent, on aura donc la solution particulière

$$\frac{x^2 e^x}{2},$$

et, par suite, la solution générale sera

$$y = (C_1 + C_2 x)e^x + \frac{x^2 e^x}{2}.$$

EMPLOI, DANS LA GÉOMÉTRIE TRILINÉAIRE, DES COORDONNÉES DES POINTS CIRCULAIRES;

Par M. H. FAURE.

I. Soient a, b, c les côtés du triangle de référence, A, B, C ses angles, S sa surface, R le rayon du cercle qui lui est circonscrit.

Considérons les deux points ω_1 et ω_2 qui ont pour coordonnées

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -1, & \alpha_2 &= -1,\\ \beta_1 &= \cos C + \sin C\sqrt{-1}, & \beta_2 &= \cos C - \sin C\sqrt{-1},\\ \gamma_1 &= \cos B - \sin B\sqrt{-1}; & \gamma_2 &= \cos B + \sin B\sqrt{-1}. \end{aligned}$$

On vérifie aisément que : 1° satisfaisant à la relation

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0,$$

ces points sont à l'infini ; 2° satisfaisant à la relation

$$a\beta\gamma + b\alpha\gamma + c\alpha\beta = 0,$$

ces points sont sur un cercle. Les points ω_1, ω_2 ainsi définis par leurs coordonnées sont donc les points situés à l'infini sur un cercle.

II. A l'aide de ces valeurs, la fonction X

$$\begin{aligned} X = ll' + mm' + nn' - 2\cos A(mn' + nm')\\ - 2\cos B(nl' + ln') - 2\cos C(lm' + ml') \end{aligned}$$

peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} X = \tfrac{1}{2}[(l\alpha_1 + m\beta_1 + n\gamma_1)(l'\alpha_2 + m'\beta_2 + n'\gamma_2)\\ + (l\alpha_2 + m\beta_2 + n\gamma_2)(l'\alpha_1 + m'\beta_1 + n'\gamma_1)]; \end{aligned}$$

la vérification est facile, en observant que

$$\alpha_1\alpha_2 = \beta_1\beta_2 = \gamma_1\gamma_2 = 1,$$
$$\gamma_1\beta_2 + \beta_1\gamma_2 = -2\cos A, \quad \alpha_1\gamma_2 + \gamma_1\alpha_2 = -2\cos B,$$
$$\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2 = -2\cos C.$$

En particulier, la fonction Z

$$Z = l^2 + m^2 + n^2 - 2mn\cos A - 2nl\cos B - 2lm\cos C$$

sera égale au produit

$$(l\alpha_1 + m\beta_1 + n\gamma_1)(l\alpha_2 + m\beta_2 + n\gamma_2).$$

III. Cela posé, soit $l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$ l'équation

d'une droite. Convenons de représenter par la notation $D(\alpha\beta\gamma)$ son premier membre et de même par $D'(\alpha\beta\gamma)$ la fonction linéaire $l'\alpha + m'\beta + n'\gamma$.

1° On sait que si, λ, μ, ν sont les distances des sommets du triangle de référence à une droite quelconque,

$$4S^2 = a^2\lambda^2 + b^2\mu^2 + c^2\nu^2 - 2bc\mu\nu\cos A - 2ca\nu\lambda\cos B - 2\lambda\mu\cos C;$$

nous pouvons donc écrire

$$4S^2 = (a\lambda\alpha_1 + b\mu\beta_1 + c\nu\gamma_1)(a\lambda\alpha_2 + b\mu\beta_2 + c\nu\gamma_2).$$

2° *Distance d'un point* (α, β, γ) *à la droite*

$$D(\alpha\beta\gamma) = 0.$$

Cette distance δ pourra s'écrire sous la forme

$$\delta = \frac{D(\alpha\beta\gamma)}{\sqrt{D(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\,D(\alpha_2\beta_2\gamma_2)}};$$

car on sait que

$$\delta = \frac{l\alpha + m\beta + n\gamma}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2 - 2mn\cos A - 2nl\cos B - 2lm\cos C}}.$$

Lorsque la droite D est déterminée par deux de ses points $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$, on a

$$\delta = \frac{|\,\alpha\ \alpha'\ \alpha''\,|}{\sqrt{|\,\alpha_1\ \alpha'\ \alpha''\,|\ |\,\alpha_2\ \alpha'\ \alpha''\,|}},$$

en convenant de représenter par $|\,\alpha\ \alpha'\ \alpha''\,|$ le déterminant des neuf quantités $\alpha, \alpha', \alpha''$; β, β', β''; $\gamma, \gamma', \gamma''$ et de même pour les autres.

Si, dans l'expression de δ, on suppose que le point (α, β, γ) coïncide successivement avecc hacun des points circulaires, et que l'on désigne par δ_1 et δ_2 les distances des points ω_1 et ω_2 à une droite quelconque, on trouve

$$\delta_1 . \delta_2 = 1.$$

3° *Angle de deux droites.* — On sait que le cosinus de l'angle θ des deux droites D, D' est donné par la relation

$$\cos\theta = \frac{X}{\sqrt{ZZ'}}.$$

Z' étant ce que devient Z lorsqu'on ajoute un accent aux lettres l, m, n. Nous avons, par conséquent, en introduisant les coordonnées des points circulaires,

$$2\cos\theta = \frac{D(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\,D'(\alpha_2\beta_2\gamma_2) + D(\alpha_2\beta_2\gamma_2)\,D'(\alpha_1\beta_1\gamma_1)}{\sqrt{D(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\,D(\alpha_2\beta_2\gamma_2)\,D'(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\,D'(\alpha_2\beta_2\gamma_2)}}.$$

Si les droites sont déterminées par les coordonnées α, β, γ de leur point d'intersection et par les coordonnées α', β', γ', α'', β'', γ'' d'un point pris sur chacune d'elles, on a aussi

$$2\cos\theta = \frac{|\alpha_1\ \alpha\ \alpha'|\,|\alpha_2\ \alpha\ \alpha''| + |\alpha_1\ \alpha\ \alpha''|\,|\alpha_2\ \alpha\ \alpha'|}{\sqrt{|\alpha_1\ \alpha\ \alpha'|\ |\alpha_2\ \alpha\ \alpha''|\ |\alpha_1\ \alpha\ \alpha''|\ |\alpha_2\ \alpha\ \alpha'|}}.$$

Si l'angle θ et les points α', α'' sont donnés, cette relation donne immédiatement l'équation du cercle passant par deux points et capable d'un angle donné.

4° *Distance de deux points m, m' donnés par leurs coordonnées* (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$. — Si, pour abréger, on pose

$$L = \beta\gamma' - \gamma\beta', \quad M = \gamma\alpha' - \alpha\gamma', \quad N = \alpha\beta' - \beta\alpha',$$

on a la relation

$$\overline{mm'}^2 = \frac{R^2}{S^2}(L^2 + M^2 + N^2 - 2MN\cos A - 2NL\cos B - 2MN\cos C).$$

Nous pouvons donc écrire, à l'aide des coordonnées des points circulaires,

$$\overline{mm'}^2 = \frac{R^2}{S^2}(L\alpha_1 + M\beta_1 + N\gamma_1)(L\alpha_2 + M\beta_2 + N\gamma_2),$$

ou bien

$$\overline{mm'}^2 = \frac{R^2}{S^2} | \alpha_1\ \alpha\ \alpha' |\ | \alpha_2\ \alpha\ \alpha' |.$$

Remarque. — Si l'on désigne maintenant par Σ l'aire d'un triangle dont les coordonnées des sommets sont (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$, on a

$$2\Sigma = \frac{R}{S} | \alpha'\ \beta\ \gamma |.$$

Si donc nous remplaçons dans la valeur de $\overline{mm'}^2$ les déterminants par leurs valeurs respectives

$$\frac{2S}{R}\omega_1 mm', \quad \frac{2S}{R}\omega_2 mm',$$

on trouvera

$$\overline{mm'}^2 = 4\omega_1 mm' . \omega_2 mm'.$$

SUR LA QUESTION 1028;

PAR M. H. FAURE,
Chef d'escadrons d'artillerie en retraite.

Cette question a déjà été traitée plusieurs fois dans les *Nouvelles Annales*, en dernier lieu par M. Doucet (2ᵉ série, t. XX, p. 321), qui en a fait l'historique.

On circonscrit à une conique donnée un triangle ayant pour hauteurs les droites qui joignent les sommets aux points de contact avec les côtés opposés : lieu des sommets du triangle, lieu des points de concours des hauteurs.

Soient abc l'un de ces triangles, A, B, C ses angles, a, b, c les longueurs de ses côtés. Prenant ce triangle pour

triangle de référence,

$$S = \cos^2 A\,\alpha^2 + \cos^2 B\,\beta^2 + \cos^2 C\,\gamma^2 - 2\cos A\cos B\cos C\left(\frac{\alpha}{\cos A} + \frac{\beta}{\cos B} + \frac{\gamma}{\cos C}\right) = 0$$

sera l'équation de la conique donnée, car il est aisé de voir que S touche le triangle *abc* aux pieds de ses hauteurs.

Considérons, d'autre part, la conique

$$S' = \cos A\,\beta\gamma + \cos B\,\gamma\alpha + \cos C\,\alpha\beta,$$

circonscrite au triangle *abc*. Je dis que cette conique est fixe, quel que soit le triangle *abc*, satisfaisant aux conditions de l'énoncé.

La différence $S - S'$ de nos deux équations peut se mettre sous la forme

$$(a\alpha + b\beta + c\gamma)\left(\frac{\cos^2 A}{a}\alpha + \frac{\cos^2 B}{b}\beta + \frac{\cos^2 C}{c}\gamma\right) - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc}(a\beta\gamma + b\gamma\alpha + c\alpha\beta);$$

d'où il suit que l'équation $S - S' = 0$ représente le lieu des sommets des angles droits circonscrits à S.

Concluons de là que, si nous considérons un triangle *quelconque abc* circonscrit à la conique S, on pourra circonscrire au triangle *abc* une conique S' qui passera par quatre points déterminés de S, ce qui exige que S' soit une conique fixe.

L'équation $S' = 0$ représente donc le lieu des sommets du triangle.

Si l'on veut avoir le lieu des points de concours des hauteurs, il suffit de remarquer que la conique $S + \lambda S' = 0$ passera par le point de concours $\alpha\cos A = \beta\cos B = \gamma\cos C$ des hauteurs du triangle de référence, pour la valeur

$$\lambda = \frac{3\cos A\cos B\cos C}{\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C};$$

donc, pour cette valeur de λ, $S + \lambda S'$ représentera le lieu du point de concours des hauteurs.

Nota. — Si l'on désigne par Δ, Δ', θ, θ' les invariants du système des coniques S et S', on trouve

$$\Delta = -4\cos^2 A \cos^2 B \cos^2 C,$$
$$\Delta' = 2\cos A \cos B \cos C,$$
$$\theta = 4\cos A \cos B \cos C(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C),$$
$$\theta' = -(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C)^2;$$

de là on peut conclure que, pour tous les triangles *abc* circonscrits à S et dont les hauteurs passent par les points de contact de la conique avec les côtés opposés, les fonctions $\cos A \cos B \cos C$ et $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C$ restent constantes.

CONCOURS D'AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES DE 1883.

COMPOSITIONS D'ADMISSIBILITÉ.

Mathématiques spéciales.

D'un point donné P on mène des normales à un ellipsoïde donné :

1° Démontrer que par les pieds de ces six normales on peut faire passer une infinité de surfaces du second ordre S concentriques à l'ellipsoïde;

2° Trouver le lieu que doit décrire le point P pour que les surfaces S soient de révolution;

3° Déterminer le cône lieu des axes de révolution des surfaces S;

4° Sur la section de ce cône, par un plan perpendicu-

laire à l'axe mineur de l'ellipsoïde, indiquer les points par lesquels passe l'axe de révolution quand la surface S est un ellipsoïde, un hyperboloïde à une ou à deux nappes, un cône, un cylindre ou un système de deux plans parallèles.

Mathématiques élémentaires.

Trouver la hauteur AB et les bases AD, BC d'un trapèze rectangle ABCD, connaissant la longueur l du côté oblique CD, l'aire a^2 du trapèze et le volume $\frac{4}{3}\pi b^3$ engendré par la révolution de la figure autour de CD.

Discuter les formules trouvées et déterminer le minimum et le maximum de b^3. On examinera les cas particuliers suivants :

$$l = a, \quad l = 3a.$$

Composition sur certaines parties, désignées à l'avance, du programme de la licence ès sciences mathématiques.

Théorie. — On donne un corps quelconque, dont les diverses parties sont douées d'un pouvoir attractif suivant la loi de Newton, et l'on admet, comme préalablement démontré, que les composantes de l'attraction exercée sur un point M, ayant pour coordonnées x, y, z, sont représentées, à un facteur constant près, par les dérivées $\frac{dV}{dx}, \frac{dV}{dy}, \frac{dV}{dz}$ du potentiel V, relatif au point M. Prouver qu'on a toujours

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = -4\pi\varepsilon,$$

ε étant la densité de la masse attirante au point de cette masse qui coïncide avec le point M.

Démontrer que toute fonction U qui, mise à la place de V dans l'équation précédente, satisfait à cette équation, ne diffère pas du potentiel V si elle remplit en outre les conditions suivantes : 1° la fonction U est continue ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre ; 2° les produits

$$\mathrm{U}x,\quad \mathrm{U}y,\quad \mathrm{U}z,\quad x^2\frac{d\mathrm{U}}{dx},\quad y^2\frac{d\mathrm{U}}{dy},\quad z^2\frac{d\mathrm{U}}{dz}$$

restent finis quand une ou plusieurs des variables x, y, z, deviennent infinies, la masse attirante étant limitée.

Application. — Étant donné un ellipsoïde E, on sait qu'en chaque point de l'espace se coupent trois surfaces du second degré homofocales à E ; désignons par λ, μ, ν les demi-axes de ces surfaces parallèles au grand axe de l'ellipsoïde E. On considère une masse indéfinie douée d'un pouvoir attractif suivant la loi de Newton, et dont la densité en chaque point est exprimée par une fonction de λ, μ, ν. On demande quelle doit être la forme la plus générale de cette fonction pour que les surfaces de niveau soient des ellipsoïdes homofocaux à E. Cette forme étant trouvée, calculer l'attraction de la masse sur un point quelconque.

COMPOSITIONS FINALES.

Composition sur un sujet de licence.

Sur une courbe plane donnée C, on prend un point A qui ne présente aucune singularité, et l'on rapporte la courbe à la tangente AX et à la normale AY au point A. On suppose, en outre, que les coordonnées d'un point variable M de la courbe C peuvent être développées en séries ordonnées suivant les puissances positives et entières de l'arc AM $= s$. Cela posé, on demande :

1° D'exprimer les coefficients des premiers termes des séries considérées, jusqu'aux termes en s^6 exclusivement, en fonction des valeurs R, R', R'', R''' que prennent au point A le rayon de courbure R de la courbe C et ses dérivées par rapport à s;

2° De calculer, en négligeant les termes en s^5, les coordonnées X, Y du point P milieu d'une corde MM' parallèle à la tangente AX et de longueur infiniment petite. On trouvera

$$X = \frac{R'}{6R}s^2 - \frac{R'^2}{18R^2}s^3 + \frac{21R' + 34R'^3 - 24RR'R'' + 9R^2R'''}{1080R^3}s^5 + \ldots,$$

$$Y = \frac{1}{2R}s^2 - \frac{R'}{6R^2}s^3 + \frac{2R'^2 - 1 - RR''}{24R^3}s^4 + \ldots;$$

3° De calculer la longueur AB du rayon du cercle qui est osculateur au point A à la courbe diamétrale lieu des milieux des cordes de la courbe C parallèles à la tangente AX;

4° De déterminer la courbe C, de telle sorte que, quel que soit le point A pris sur cette courbe, la projection du rayon de courbure AB sur la normale AY soit égale à $\frac{5}{4}$R. On étudiera la forme des courbes satisfaisant à la condition précédente.

Épreuve pratique de calcul.

Résoudre l'équation

$$9x^4 - 14x^2 + 8x - 1 = 0.$$

Composition en Géométrie descriptive.

On donne un tétraèdre régulier SABC, dont la base ABC repose sur le plan horizontal de projection et dont le sommet S est situé au-dessus de ce plan.

Les hauteurs $A\alpha$, $B\beta$ de la face SAB, en tournant la première autour de l'arête SA, la seconde autour de l'arête SB, engendrent deux cônes. On demande de construire les projections des courbes d'intersection de ces deux cônes.

Données. — L'arête du tétraèdre a $0^m,12$, le côté AB de la base ABC fait un angle de 45° avec la ligne de terre; le sommet C est situé dans cet angle de 45° et le point D où le côté AB rencontre la ligne de terre est situé à $0^m,07$ du sommet A le plus rapproché de la ligne de terre.

Pour distinguer les parties vues et cachées, on regardera les deux cônes comme des surfaces opaques.

LEÇONS SUR LES MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

1. Mener d'un point donné une normale à une conique à centre. — Discussion.

2. Définition de la fonction a^x. — Étude de cette fonction.

3. Intersection d'un cône et d'un cylindre dans le cas où la courbe d'intersection a des branches infinies.

4. Sections planes de la surface gauche de révolution.

5. Règle des signes de Descartes.

6. Équation du plan tangent à une surface donnée. Problèmes sur les plans tangents aux surfaces du second ordre.

7. Résolution algébrique de l'équation du troisième degré.

8. Application de la théorie des déterminants à la résolution d'un système de trois équations à trois inconnues. — Discussion. — Cas où les équations sont homogènes.

9. Transformation des équations algébriques, dans le cas où chaque racine de l'équation cherchée est une

fonction rationnelle d'une ou de deux racines de l'équation proposée. — Exemples.

10. Résolution de l'équation binôme $x^m - 1 = 0$. Application au calcul des côtés des polygones réguliers.

11. Application de la théorie des dérivées à l'étude des fonctions d'une seule variable. — Exemples.

12. Plans principaux et axes d'une surface du second degré.

13. Mener par une droite un plan tangent à un hyperboloïde de révolution à une nappe (Géométrie descriptive).

14. Première leçon sur les fractions continues.

15. Théorème de Sturm.

16. Intersection de deux coniques. — On ramènera la question à la résolution d'une équation du troisième degré.

17. Résumer la marche à suivre pour résoudre une équation algébrique à coefficients numériques. — Méthode d'approximation de Newton.

18. Sections circulaires des surfaces du second degré. — Cas où la surface est rapportée à des axes de coordonnées rectangulaires quelconques.

LEÇONS SUR LES MATHÉMATIQUES ELÉMENTAIRES.

1. Division des nombres entiers.

2. Recherche du rapport de la circonférence au diamètre.

3. Division des polynômes.

4. Mesure des angles.

5. Première leçon sur la mesure des volumes.

6. Résolution et discussion du système des équations $ax + by = c$, $a'x + b'y = c'$.

7. Étude du trinôme $ax^2 + bx + c$.

8. Théorème sur le maximum d'un produit de plusieurs facteurs dont la somme est constante. — Applications.

9. Formules relatives à l'addition et à la soustraction des arcs.

10. Plus grand commun diviseur et plus petit commun multiple de plusieurs nombres entiers. (On n'emploiera pas la décomposition en facteurs premiers.)

11. Première leçon sur les nombres premiers.

12. Équation bicarrée. — Transformation des expressions de la forme $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$.

13. Réduction à deux forces d'un système de forces appliquées à un corps solide. — Conditions d'équilibre.

14. Racine carrée des nombres entiers.

15. Calculer $\sin\frac{1}{2}a$ et $\cos\frac{1}{2}a$ en fonction de $\sin a$ et de $\cos a$. — Calculer $\tang\frac{a}{2}$ connaissant $\tang a$.

16. Conversion d'une fraction ordinaire en fraction décimale. — Fractions périodiques.

17. Relations entre les côtés et les angles d'un triangle quelconque.

18. Résolution et discussion de l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

— Séparation des racines dans le cas où elles sont réelles.

ERRATA.

Même tome, p. 39, ligne 4, *au lieu de* XGI, *lire* GI.

» » » 2 en remontant, la dernière fraction doit être multipliée par 9.

CORRESPONDANCE.

Monsieur le Rédacteur,

Permettez-moi quelques mots de réponse à la critique de M. le Dr Peano [1], à laquelle M. Jordan n'aurait eu aucune peine à répondre lui-même, s'il n'eût probablement aperçu derrière quelque difficulté plus subtile.

J'observe d'abord qu'il n'est pas nécessaire que les ε tendent vers zéro pour *tout* mode de division de l'intervalle h en parties indéfiniment décroissantes δ; il suffit que cela ait lieu pour *un* mode de division, et le théorème dont il s'agit sera démontré. M. Peano suppose, dans sa critique et dans son exemple, que les quantités a_r ne sont pas des valeurs *fixes* de la variable x. Or, rien n'empêche de concevoir que l'on fasse décroître les intervalles entre les valeurs consécutives de x, tout en supposant celles-ci fixes, en intercalant entre elles de nouvelles valeurs de x qui resteront fixes à leur tour, entre celles-ci de nouvelles valeurs également fixes, et ainsi de suite indéfiniment [2]. Les intervalles δ, toujours subdivisés, pourront décroître au-dessous de toute grandeur donnée, et chaque valeur intercalée x restant fixe, le rapport

$$\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}=\varphi(x,\delta)$$

ne pourra tendre, pour chacune d'elles, vers une limite différente de $f'(x)$. A moins donc que, pour *tout* mode

---

[1] *Nouvelles Annales*, janvier 1884.

[2] C'est bien là, à en juger par les termes, la pensée de M. Jordan.

de division de l'intervalle h en parties indéfiniment décroissantes δ, la différence

$$\varphi(x, \delta) - f'(x)$$

ne reste supérieure à une limite fixe pour un nombre fini ou indéfiniment croissant de valeurs de x, quand tous les intervalles δ tendent simultanément vers zéro, la démonstration poura toujours se faire de la même manière.

Ce n'est pas le cas, on le voit sans peine, pour la fonction

$$x^2 \sin \frac{1}{x};$$

aussi le théorème contesté lui est-il parfaitement applicable. En faisant $a_1 = \frac{1}{2n\pi}$ et $a_2 = \frac{1}{(2n+1)\pi}$ et faisant par conséquent tendre simultanément a_1 et a_2 vers zéro, M. Peano introduit arbitrairement une condition inutile. La démonstration ne peut se faire *par cette voie,* voilà tout.

M. Peano croit qu'il est facile de démontrer la formule

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x+\theta h),$$

sans supposer la continuité de la dérivée. M. Jordan demande, non sans malice, à voir cette démonstration, laquelle est impossible, puisque le théorème est inexact.

Supposons une fonction $f(x)$ égale à $\sqrt{2px}$ depuis $x = 0$ jusqu'à $x = a$, et à $\sqrt{2p(2a-x)}$ depuis $x = a$ jusqu'à $x = 2a$. Cette fonction est continue, mais sa dérivée cesse de l'être pour $x = a$, où elle passe de la valeur $\sqrt{\frac{p}{2a}}$ à la valeur $-\sqrt{\frac{p}{2a}}$.

On a évidemment, h étant $< a$,

$$f(a+h) - f(a-h) = \sqrt{2p(a-h)} - \sqrt{2p(a-h)} = 0;$$

or il n'existe entre $a - h$ et $a + h$ aucune valeur de x pour laquelle $f'(x)$ se réduise à zéro.

Notons que le théorème de M. Jordan reste vrai, au contraire, dans ce cas-ci, car zéro est compris entre les valeurs

$$\sqrt{\frac{p}{2(a-h)}} \quad \text{et} \quad -\sqrt{\frac{p}{2(a-h)}}$$

de $f'(x)$ qui correspondent à $a - h$ et à $a + h$. Et cependant M. Peano pourrait ici renouveler son objection, puisque $f(a + \delta) - f(a - \delta)$ n'a pas pour limite $f'(a)$ lorsque δ tend vers zéro.

Ph. Gilbert,
Professeur à l'Université de Louvain.

PROGRAMMA DI CONCORSO.

La R. Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli conferirà un premio di lire cinquecento all'Autore della migliore Memoria risponsiva al seguente tema :

Esporre con metodo uniforme ciò che si conosce delle superficie di 4° ordine ed apportare alla teoria generale di queste qualche importante contribuzione.

L'Accademia gradirebbe specialmente la classificazione delle superficie di 4° ordine in famiglie, considerando come appartenenti ad una stessa famiglia due superficie che si possono far corrispondere punto a punto univocamente.

La trattazione potrà essere geometrica o analitica, ma nel primo caso si aggiungeranno le corrispondenti formole analitiche più importanti, e nel secondo caso si

daranno le interpretazioni geometriche delle formole relative ai punti principali della teoria.

CONDIZIONI.

1° Le Memorie dovranno essere scritte in italiano, francese o latino, e dovranno inviarsi al Segretario dell'Accademia non più tardi del mese di marzo del 1885.

2° Esse non debbono portare il nome dell'autore, e debbono essere distinte con un motto il quale dovrà essere ripetuto sopra una scheda suggellata che conterrà il nome dell'autore.

3° La Memoria premiata sarà pubblicata negli *Atti* dell'Accademia, e l'Autore ne avrà cento copie.

4° Tutte le Memorie inviate pel concorso al premio si conserveranno nell'Archivio dell'Accademia, e soltanto si permetterà di estrarne copia a chi le avrà presentate.

NOTICE BIBLIOGRAPHIQUE.

Intorno alla vita ed ai lavori di Antonio-Carlo-Marcellino Poullet-Delisle; Notizie raccolte da B. Boncompagni.

Sous ce titre, l'éminent éditeur du *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche*, le prince Balthazar Boncompagni vient de publier, à Rome, une curieuse Notice biographique, qui remet en lumière un savant mathématicien français, un administrateur intègre et distingué, mort il y a moins de quarante ans, injustement oublié de ses compatriotes et même de l'Université, dont il avait été l'un des serviteurs les plus dévoués. Nul bibliographe français, à l'exception de Quérard, n'avait même songé à seulement mentionner le nom et les Ouvrages de Poullet-Delisle.

Né à Janville (au diocèse de Chartres) le 17 janvier 1778, mort le 23 août 1849 à Arrou (arrondissement de Châteaudun), Antoine-Charles-Marcellin Poullet-Delisle, ancien élève de l'École Polytechnique et professeur de Mathématiques au lycée d'Orléans, n'avait pas encore trente ans lorsqu'il publia, sous le titre de *Recherches arithmétiques*, sa traduction des *Disquisitiones arithmeticæ* de Gauss. Deux ans plus tard, en 1809, il faisait paraître et dédiait à Laplace un *Traité d'application de l'Algèbre à la Géométrie* qui fut longtemps classique. Mais bientôt il quittait l'enseignement des Mathématiques pour entrer dans l'Administration universitaire, et le 15 décembre de cette même année, 1809, il était nommé Inspecteur de l'Académie d'Orléans. Dans ces fonctions, comme dans celles de Recteur d'Académie et d'Inspecteur général qu'il obtint ensuite, pendant toute la durée de sa longue carrière administrative, ainsi qu'il le dit lui-même, « *il attaqua de front les coupables et défendit ouvertement l'innocence injustement attaquée* ». Il fut toujours juste envers ses subordonnés, remplissant ainsi le premier des devoirs d'un chef; mais on ne le fut pas toujours à son égard. Une lettre qu'il écrivit de Limoges, le 10 juin 1825, au Directeur de l'Instruction publique, le démontre suffisamment. Cette lettre, conservée aux Archives nationales, a été reproduite intégralement dans la Notice du prince Balthazar Boncompagni; nous regrettons de ne pouvoir la donner ici tout entière, mais nous ne pouvons nous empêcher d'en citer les lignes suivantes, en rappelant que c'était M. l'abbé Frayssinous, évêque d'Hermopolis, premier aumônier du roi, qui remplissait alors les fonctions de Ministre Secrétaire d'État au département des Affaires ecclésiastiques et de l'Instruction publique.

Poullet-Delisle s'exprime ainsi : « En 1824, je me trouve exilé d'Angers à Limoges parce qu'un homme ambitieux et intrigant, qui cherche à peupler de ses créatures le département de Maine-et-Loire qu'il veut dominer, travaillait depuis dix-huit mois à faire placer son ancien précepteur à la tête de l'Académie d'Angers, et que lui et ses amis d'alors, car je doute qu'il les ait tous conservés, trompèrent la religion de Son Excellence, en lui persuadant que l'on désirait un Recteur ecclésiastique. Cependant, Monsieur le Directeur, Son Excellence daigna m'assurer que j'étais loin d'avoir rien perdu dans son estime, et qu'Elle ne m'envoyait à Limoges que pour rétablir

l'ordre de cette Académie, ajoutant qu'Elle me tiendrait compte du sacrifice qu'Elle m'imposait. Dans la conversation Elle s'aperçut que je n'avais pas la croix de la Légion d'honneur. Elle eut la bonté de s'en étonner, et surtout que je ne l'eusse pas demandée : « *Monseigneur*, lui répondis-je, *elle s'obtient, mais ne se demande pas !* »

Nous devons être reconnaissants au Prince Balthazar Boncompagni d'avoir fait connaître au monde savant, et particulièrement au public français, un mathématicien et un administrateur si digne d'estime, et nous applaudissons sincèrement pour notre part à cet acte de réparation et de justice.

ARISTIDE MARRE.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

TRAITÉ D'ASTRONOMIE PRATIQUE, comprenant l'exposition du calcul des éphémérides astronomiques et nautiques, d'après les méthodes en usage dans la composition de la *Connaissance des Temps* et du *Nautical Almanac*, avec une introduction historique et de nombreuses notes; par M. *Abel Souchon*, membre adjoint du Bureau des Longitudes. Grand in-8, avec figures dans le texte. Prix : 15 fr. Paris, Gauthier-Villars; 1883.

THÉORIE MÉCANIQUE DE LA CHALEUR; par *Ch. Briot*. 2e édition, publiée par M. *E. Mascart*, professeur au Collège de France. In-8, avec figures dans le texte. Prix : 7fr, 50. Paris, Gauthier-Villars; 1883.

ANNUAIRE DE L'OBSERVATOIRE DE MONTSOURIS pour l'an 1884. *Météorologie, Agriculture, Hygiène*. In-18, avec figures dans le texte. Prix : 2 fr. Paris, Gauthier-Villars; 1884.

TIRAGES A PART.

Note de Géométrie, par M. E. CESARO, élève-ingénieur des mines. In-8. Liège; 1881.

Les connaissances mathématiques de Jacques Casanova de Seingalt, par M. C. Henry. Extrait du *Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche,* t. XV; 1882.

Sur quelques propositions inédites de Fermat; note de M. C. Henry. Extrait des *Transunti della reale Accademia dei Lincei,* série 3, vol. VII; 1882.

A prefatory essay to the new science : mathematical commensuration. Preceded by a brief retrospective view of research in the domain of Geometry, by Chas. De Medici, D. ph. In-16. Chicago, Ill., A. M. Flanagan; 1883.

Sur la diffraction des ondes planes dans une ouverture circulaire, par le P. J. Delsaulx. Extrait des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles,* 7e année; 1883.

Resolution of solvable equations of the fifth degree, by George Paxton Young. Toronto, Canada. Extrait de *American Journal of Mathematics,* n° 2, vol. VI.

QUESTIONS.

1484. On donne sur une droite deux systèmes de trois points a, a', a'' et b, b', b'' qui font partie d'une division homographique. Sur ab comme diamètre on décrit un cycle C dont le sens est déterminé par la condition qu'au-dessus de la droite le point décrivant aille de a en b; les segments $a'b'$ et $a''b''$ déterminent de même deux autres cycles C′ et C″. Si l'on trace un cycle tangent à C, C′ et C″, démontrer que les points où il coupe la droite sont les deux points doubles de la division homographique.

(Laguerre.)

1485. Ayant pris, au hasard, un chiffre d'une puissance quelconque de 5, il y a avantage à parier que c'est un 5 ou un o. (E. Cesaro.)

1486. La probabilité que la conique déterminée par cinq points, pris au hasard dans un plan, soit une ellipse, est infiniment petite. (E. Cesaro.)

1487. A un triangle ABC on circonscrit une conique, de centre (x, y, z). On sait que les droites qui joignent chaque sommet du triangle au pôle du côté opposé se coupent en un même point (x', y', z'). Démontrer qu'il y a réciprocité entre les points (x, y, z), (x', y', z') et que cette réciprocité est définie par les relations

$$\frac{yz' + zy'}{a} = \frac{zx' + xz'}{b} = \frac{xy' + yx'}{c},$$

où a, b, c sont les côtés de ABC.

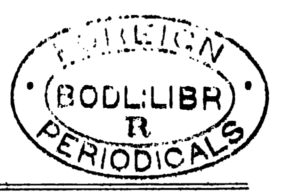
(E. Cesaro.)

RECTIFICATION.

M. P. Barbarin, professeur au lycée de Toulon, a construit, même tome, p. 100, une courbe du quatrième degré qui est tout à fait erronée. Cette courbe n'est autre que l'ensemble des deux coniques

$$ax^2 \pm 2\sqrt{a^2 + c^2}\,xy + ay^2 - ac^2 = 0.$$

La recherche des lignes de courbure de la surface $az = xy$ avait été posée aux examens de licence, à Marseille, en novembre 1880, et c'est ce qui avait motivé l'insertion de l'article. La propriété principale, démontrée par M. Barbarin, a été énoncée par M. Serret, en 1847, dans le *Journal de Liouville*. Ce dernier renseignement est dû à M. Catalan. Ch. B.



NOTE SUR UN FAISCEAU DE SURFACES D'ORDRE QUELCONQUE

[SUITE (1)];

PAR M. A. LEGOUX.

CONSIDÉRATIONS SUR LES SURFACES HOMOFOCALES ET ORTHOGONALES.

Recherche des caractéristiques du système de surfaces de U.

On sait que Chasles appelle *caractéristiques d'un système de surfaces :* 1° le nombre de ces surfaces qui passent par un point donné; 2° le nombre des surfaces tangentes à une droite donnée; 3° le nombre des surfaces tangentes à un plan donné.

La première des caractéristiques est évidemment l'unité.

Le nombre des surfaces du système qui sont tangentes à une droite donnée est égal au nombre des courbes situées sur la surface et dans un plan passant par la droite donnée, tangentes à cette droite; ce qui revient à dire que ce nombre est le même que la seconde caractéristique du système de courbes planes représentées par l'intersection des surfaces U avec un plan quelconque

$$u = Ax + By + Cz,$$

ou bien des courbes dont l'équation est

$$x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma} (Ax + By + Cz)^{\delta} + K w^{\epsilon} = 0,$$

(1) Voir 3e série, t. II, p. 233.

où l'on suppose que dans w on a remplacé u par sa valeur en x, y, z.

Or l'équation précédente est de la forme

$$u_1^\alpha u_2^\beta u_3^\gamma u_4^\delta u_5^\varepsilon = \mathrm{K},$$

avec la condition

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 0.$$

$u_1, u_2, u_3, \ldots$ représentant des fonctions linéaires des coordonnées, savoir

$$u_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z, \quad u_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 z, \quad \ldots,$$

l'équation différentielle de ces courbes planes est

$$\alpha \frac{du_1}{u_1} + \beta \frac{du_2}{u_2} + \gamma \frac{du_3}{u_3} + \ldots = 0;$$

et l'on voit bien facilement qu'on peut la mettre sous la forme

$$\begin{aligned} \alpha u_2 u_3 u_4 \Big[(a_1 b_5 - b_1 a_5) \left(y - x \frac{dy}{dx} \right) \\ + (b_1 c_5 - b_5 c_1) z \frac{dy}{dx} + (a_1 c_5 - c_1 a_5) z \Big] \\ + \beta u_3 u_4 u_1 [\ldots] + \ldots = 0, \end{aligned}$$

ou bien encore

$$\mathrm{P}\left(y - x \frac{dy}{dx} \right) + \mathrm{Q} \frac{dy}{dx} + \mathrm{R} = 0,$$

P, Q, R représentant des polynômes du troisième degré en x, y, z.

Or, si l'on donne le coefficient angulaire de la tangente $\frac{dy}{dx}$ et l'ordonnée à l'origine $y - x \frac{dy}{dx}$, on aura une équation du troisième ordre pour déterminer les points de contact. Il existe donc trois courbes du système tangentes à une droite donnée. D'après ce qui a été dit plus haut, la seconde caractéristique du système de surfaces est donc 3.

Cherchons enfin combien il existe de surfaces du système tangentes à un plan donné

$$AX + BY + CZ + DU = 0.$$

En désignant par x, y, z, u les coordonnées d'un des points de contact, on trouve, pour déterminer ces coordonnées, les relations suivantes :

$$\frac{a\varepsilon - \frac{\alpha\varpi}{x}}{A} = \frac{b\varepsilon - \frac{\beta\varpi}{y}}{B} = \frac{c\varepsilon - \frac{\gamma\varpi}{z}}{C} = \frac{d\varepsilon - \frac{\delta\varpi}{u}}{D},$$

$$Ax + By + Cz + Du = 0.$$

Prenons pour inconnue auxiliaire le rapport commun; soit λ ce rapport, on aura

$$a\varepsilon - \frac{\alpha\varpi}{x} = \lambda A, \quad b\varepsilon - \frac{\beta\varpi}{y} = \lambda B,$$

$$c\varepsilon - \frac{\gamma\varpi}{z} = \lambda C, \quad d\varepsilon - \frac{\delta\varpi}{u} = \lambda D.$$

Tirant de là les valeurs de x, y, z, u et remplaçant dans la dernière équation, il vient, pour déterminer λ,

$$(5)\left\{\begin{array}{l} \dfrac{A\alpha}{a\varepsilon - \lambda A} + \dfrac{B\beta}{b\varepsilon - \lambda B} + \dfrac{C\gamma}{c\varepsilon - \lambda C} + \dfrac{D\delta}{d\varepsilon - \lambda D} = 0 \\ \text{ou} \\ \dfrac{\alpha}{\lambda - \frac{a\varepsilon}{A}} + \dfrac{\beta}{\lambda - \frac{b\varepsilon}{B}} + \dfrac{\gamma}{\lambda - \frac{c\varepsilon}{C}} + \dfrac{\delta}{\lambda - \frac{d\varepsilon}{D}} = 0. \end{array}\right.$$

C'est une équation du troisième degré en λ qui a ses trois racines réelles et, comme à chaque valeur de λ correspond un système unique de valeurs pour x, y, z, u, il en résulte qu'il existe trois surfaces du système tangentes à un plan donné et que la troisième caractéristique est 3. On aura donc un système (1, 3, 3) d'après les notations de Chasles, et ces surfaces U jouissent de

toutes les propriétés communes aux surfaces de ce système.

Si l'on considère les transformées des surfaces précédentes par le principe de dualité, on aura des surfaces faisant partie du système (3, 3, 1), c'est-à-dire qu'il en passera trois par un point quelconque de l'espace et que l'on aura par suite un système triple. Nous verrons bientôt que ce système triple devient dans un cas particulier un système triple orthogonal et que les surfaces qui constituent ce système n'ont pas d'enveloppe, autrement dit que le système de surfaces orthogonales ne forme pas un système homofocal. La considération des courbes paraboliques tracées sur les surfaces U nous conduira sans peine à ce résultat remarquable.

Théorème. — *Les trois points de contact des trois surfaces du système* U *qui touchent un plan quelconque sont les trois sommets d'un triangle conjugué relativement à la section du cône* (4) *par ce plan.*

Pour démontrer ce théorème, cherchons les équations de condition qui doivent être satisfaites pour que le triangle, ayant pour sommets les points de contact des trois surfaces U qui touchent un plan quelconque, soit un triangle conjugué relativement à la section du cône (4) par ce plan.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les trois racines de l'équation en λ; x_1, y_1, z_1, u_1 les valeurs de x, y, z, u correspondant à λ_1; x_2, y_2, z_2, u_2 les valeurs correspondant à λ_2, etc.

L'équation du cône (4) peut être mise sous la forme simple

$$(4\ bis)\qquad \frac{a^2x^2}{\alpha}+\frac{b^2y^2}{\beta}+\frac{c^2z^2}{\gamma}+\frac{d^2u^2}{\delta}=\frac{w^2}{\varepsilon}\ (^1);$$

(1) Voir même Recueil, 3e série, t. II, p. 77.

l'équation du plan polaire du point (x_1, y_1, z_1, u_1) relativement à ce cône est

$$\left(a\varpi_1 - \frac{\varepsilon}{\alpha}a^2x_1\right)X + \left(b\varpi_1 - \frac{\varepsilon}{\beta}b^2y_1\right)Y$$
$$+\left(c\varpi_1 - \frac{\varepsilon}{\gamma}c^2z_1\right)Z + \left(d\varpi_1 - \frac{\varepsilon}{\delta}d^2u_1\right)U = 0.$$

En exprimant que ce plan passe par les deux autres points (x_2, y_2, z_2, u_2), (x_3, y_3, z_3, u_3), on a

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &-\frac{\varpi_1\varpi_2}{\varepsilon} + \frac{a^2x_1x_2}{\alpha} + \frac{b^2y_1y_2}{\beta} \\ &\qquad + \frac{c^2z_1z_2}{\gamma} + \frac{d^2u_1u_2}{\delta} = 0, \\ &-\frac{\varpi_1\varpi_3}{\varepsilon} + \frac{a^2x_1x_3}{\alpha} + \frac{b^2y_1y_3}{\beta} \\ &\qquad + \frac{c^2z_1z_3}{\gamma} + \frac{d^2u_1u_3}{\delta} = 0 \end{aligned}\right.$$

Enfin on a une troisième équation de condition

$$-\frac{\varpi_2\varpi_3}{\varepsilon} + \frac{a^2x_2x_3}{\alpha} + \frac{b^2y_2y_3}{\beta} + \frac{c^2z_2z_3}{\gamma} + \frac{d^2u_2u_3}{\delta} = 0,$$

qui, jointe aux deux précédentes, exprime que le triangle en question est conjugué relativement au cône. Il faut montrer que ces trois équations sont identiques lorsqu'on remplace les x, y, z, u par leurs valeurs en fonction des λ fournis par l'équation (5).

Retranchons membre à membre les équations (6), d'abord les deux premières, et remarquons que, x, y, z n'entrant dans ces équations que par les rapports $\frac{x}{\varpi}, \frac{y}{\varpi}, \ldots$, on peut supposer $\varpi = 1$ pour simplifier l'écriture; il vient

$$\frac{a^2}{\alpha}x_1(x_2 - x_3) + \frac{b^2}{\beta}y_1(y_2 - y_3)$$
$$+ \frac{c^2}{\gamma}z_1(z_2 - z_3) + \frac{d_2}{\delta}u_1(u_2 - u_3) = 0.$$

Remplaçons $x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots$ par leurs valeurs en $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, on trouve que le premier terme devient, en posant

$$S_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad S_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3, \quad S_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3,$$
$$\frac{\alpha A a^2(\lambda_2 - \lambda_3)}{a^3\varepsilon^3 - A a^2\varepsilon^2 S_1 + A^2 a\varepsilon S_2 - A^3 S_3}.$$

Par une substitution pareille, le deuxième terme devient

$$\frac{\beta B b^2(\lambda_2 - \lambda_3)}{b^3\varepsilon^3 - B b^2\varepsilon^2 S_1 + B^2 b\varepsilon S_2 - B^3 S_3}, \ \ldots;$$

de sorte que l'équation prend la forme suivante

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\alpha a^2 A}{a^3\varepsilon^3 - A a^2\varepsilon^2 S_1 + A^2 a\varepsilon S_2 - A^3 S_3} \\ &+ \frac{\beta b^2 B}{b^3\varepsilon^3 - B b^2\varepsilon^2 S_1 + B^2 b\varepsilon S_2 - B^3 S_3} \\ &+ \frac{\gamma c^2 C}{c^3\varepsilon^3 - C c^2\varepsilon^2 S_1 + C^2 c\varepsilon S_2 - C^3 S_3} \\ &+ \frac{\delta d^2 D}{d^3\varepsilon^3 - D d^2\varepsilon^2 S_1 + D^2 d\varepsilon S_2 - D^3 S_3} = 0. \end{aligned}\right.$$

Si nous retranchons membre à membre la première et la troisième, puis la deuxième et la troisième des équations (6), et si nous remplaçons les x, y, z, u par les λ, nous retomberons sur deux équations identiques à la précédente; donc il suffit de vérifier que (7) est une identité.

L'équation (5) donne

$$\begin{aligned} ABCD.S_1 &= ABC\,d(\alpha+\beta+\gamma) + ABD\,c(\alpha+\beta+\delta) + \ldots, \\ ABCD.S_2 &= \varepsilon[AB\,cd(\alpha+\beta) + AC\,bd(\alpha+\gamma) + \ldots], \\ ABCD.S_3 &= \varepsilon^2(A\,bdc\alpha + B\,acd\beta + \ldots). \end{aligned}$$

Effectuons les substitutions des S_1, S_2, S_3 dans le premier terme de (7); il vient, toutes réductions faites,

$$\frac{a^2}{(aB - bA)(aC - cA)(aD - dA)}.$$

On aura des expressions analogues pour les autres termes, et (7) devient

$$\frac{a^2}{(aB-bA)(aC-cA)(aD-dA)} + \frac{b^2}{(bC-cB)(bD-dB)(bA-aB)} + \frac{c^2}{(cD-dC)(cA-aC)(cB-bC)} + \frac{d^2}{(dA-aD)(dB-bD)(dC-cD)} = 0,$$

ou bien, en chassant les dénominateurs,

$$\begin{aligned} & a^2(bC-cB)(bD-dB)(cD-dC) \\ & + b^2(cA-aC)(aD-dA)(cD-dC) \\ & + c^2(aB-bA)(aD-dA)(bD-dB) \\ & + d^2(bA-aB)(aC-cA)(bC-cB) = 0. \end{aligned}$$

On vérifie facilement que c'est une identité; d'où résulte la démonstration du théorème.

Maintenant considérons, sur une des surfaces U, la courbe parabolique d'ordre 2ε et la développable circonscrite à cette surface suivant la courbe parabolique qui représente, comme on sait, l'arête de rebroussement de cette développable.

Dans chacune des surfaces réciproques de U, on aura une courbe de rebroussement et une développable (¹) circonscrite à la surface suivant cette ligne de rebroussement, lesquelles correspondront, en vertu du principe de dualité, à la développable osculatrice et à la courbe parabolique précédentes; d'où :

Théorème. — *Les surfaces réciproques des surfaces* U *forment un système triple, c'est-à-dire qu'il en passera trois par un point quelconque de l'espace; chacune de*

(¹) *Voir* Salmon, *Geometry of three dimensions*, p. 526.

ces surfaces aura une ligne de rebroussement, la développable circonscrite à la surface suivant cette ligne de rebroussement sera de classe 2ε, et elle sera circonscrite à une conique imaginaire transformée du cône (4) qui représente le lieu des courbes paraboliques dans les premières surfaces.

Aux trois surfaces U qui touchent un plan quelconque correspondent trois surfaces réciproques passant par un point donné, et aux trois points de contact, les trois plans tangents aux trois surfaces menées par le point donné. Et, comme le triangle formé par les trois premiers points est conjugué relativement au cône (4), les trois plans tangents aux surfaces réciproques qui passent par un point donné sont conjugués relativement à la conique imaginaire C qui est la transformée du cône.

Si, en particulier, cette conique C devient le cercle imaginaire de l'infini, on aura :

THÉORÈME. — *Les surfaces réciproques de* U *constituent, dans le cas où la conique* C *devient le cercle imaginaire de l'infini, un système triple orthogonal, et, d'après le théorème de Dupin, chacune d'elles est coupée par les deux autres suivant ses lignes de courbure.*

Remarque. — Les surfaces de ce système triple n'ont pas d'enveloppe. En effet, pour que deux des trois plans tangents coïncident, il faut que deux sommets du triangle conjugué dans les premières surfaces U soient sur le cône imaginaire et, par suite, les deux plans tangents coïncidents dans les surfaces réciproques sont tangents à la développable circonscrite à la surface suivant la ligne de rebroussement imaginaire.

On a ici un exemple remarquable d'un système triple

de surfaces, orthogonales dans un cas particulier, et qui n'ont pas d'enveloppe, qui, par conséquent, ne sont pas homofocales. La méthode générale qui sert à trouver l'enveloppe donnerait ici le lieu des courbes de rebroussement des surfaces du système. Cette remarque ne me paraît pas avoir été faite jusqu'à ce jour.

C'est ainsi que dans le plan un système de courbes orthogonales n'admet pas d'enveloppe en général, autrement dit un système de courbes orthogonales ne constitue pas généralement un système homofocal. Le lieu des points où les deux tangentes aux deux courbes qui passent par ces points coïncident est, en général, un lieu de points singuliers (1).

Inversement on peut avoir dans le plan des courbes homofocales qui ne sont pas orthogonales. Nous en avons donné un exemple dans les courbes représentées par l'équation

$$\frac{x^2}{\lambda f - a} + \frac{y^2}{\lambda f - b} = 1,$$

où f représente une fonction quelconque de x et de y, a et b des constantes et λ un paramètre arbitraire. Ces courbes sont, quelle que soit la fonction f, homofocales aux coniques $\frac{x^2}{\lambda - a} + \frac{y^2}{\lambda - b} = 1$; mais, pour qu'elles soient orthogonales, il faut que la fonction f satisfasse à une certaine équation aux dérivées partielles qu'il est aisé d'établir. (*Voir* même Recueil, 2e série, t. XX, p. 406.)

De même, si l'on considère les surfaces du système triple

$$\frac{x^2}{\lambda f - a} + \frac{y^2}{\lambda f - b} + \frac{z^2}{\lambda f - c} = 1,$$

---

(1) DARBOUX, *Comptes rendus*, t. LXXI, p. 267; *Étude géométrique et analytique d'une famille de courbes*, thèse par l'auteur.

où f représente une fonction quelconque de x, y, z, toutes ces surfaces sont homofocales; elles sont inscrites dans la même développable focale, quelle que soit la forme de la fonction f, mais elles ne sont pas orthogonales.

Pour qu'elles soient orthogonales, il faudrait que la fonction f satisfît à trois équations aux dérivées partielles du premier ordre que l'on trouve aisément en exprimant les conditions d'orthogonalité. Ce calcul nous a conduit à cette solution négative, à savoir que les trois équations n'avaient pas de solution commune, que, par conséquent, le système triple en question n'était pas, sauf le cas des surfaces quadratiques, un système triple orthogonal.

Équation tangentielle des surfaces U.

Si l'on se reporte aux relations entre les coordonnées x, y, z, u et le paramètre λ, on en tire

$$\frac{x}{w} = \frac{\alpha}{a\varepsilon - \lambda A}, \quad \frac{y}{w} = \frac{\beta}{b\varepsilon - \lambda B}, \quad \frac{z}{w} = \frac{\gamma}{c\varepsilon - \lambda C}, \quad \ldots;$$

remplaçant dans l'équation générale des surfaces U, il vient

$$\left(\lambda - \frac{a\varepsilon}{A}\right)^{\alpha}\left(\lambda - \frac{b\varepsilon}{B}\right)^{\beta}\left(\lambda - \frac{c\varepsilon}{C}\right)^{\gamma}\left(\lambda - \frac{d\varepsilon}{D}\right)^{\delta} + \frac{(-1)^{\varepsilon}}{K}\left(\frac{\alpha}{A}\right)^{\alpha}\left(\frac{\beta}{B}\right)^{\beta}\left(\frac{\gamma}{C}\right)^{\delta}\left(\frac{\delta}{D}\right)^{\gamma} = 0;$$

d'ailleurs λ doit satisfaire à l'équation (4) ou (4 *bis*)

$$\frac{\alpha}{\lambda - \frac{a\varepsilon}{A}} + \frac{\beta}{\lambda - \frac{b\varepsilon}{B}} + \frac{\gamma}{\lambda - \frac{c\varepsilon}{C}} + \frac{\delta}{\lambda - \frac{d\varepsilon}{D}} = 0.$$

On obtiendra donc l'équation en coordonnées tangentielles A, B, C, D, en éliminant le paramètre λ entre ces deux équations.

On voit, à l'inspection de ces équations, que le résultat de cette élimination n'est autre chose que le discriminant de la première équation. On aura une équation de degré 3ε en A, B, ... et du troisième degré en K. Donc les surfaces réciproques de U forment bien un système triple d'ordre 3ε et de classe ε. Si l'on considère A, B, C, D comme des coordonnées ponctuelles, l'équation résultant de l'élimination de λ représentera en coordonnées ponctuelles les surfaces réciproques de U relativement à la quadratique $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 0$ (¹).

Application au cas particulier où $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$, $\varepsilon = 4$. — Les surfaces réciproques de U sont des surfaces de douzième ordre et de quatrième classe dont l'équation en A, B, C, D se présente sous une forme assez simple.

L'équation en λ devient, dans ce cas,

$$\lambda^4 - 4\left(\frac{a}{A} + \frac{b}{B} + \frac{c}{C} + \frac{d}{D}\right)\lambda^3 + 16\left(\frac{ab}{AB} + \frac{ac}{AC} + \ldots\right)\lambda^2 - 64\left(\frac{abc}{ABC} + \frac{acd}{ACD} + \ldots\right)\lambda + \frac{1}{k\,ABCD} = 0.$$

Or on sait (Salmon, *Higher Algebra*, p. 171) que le discriminant d'une équation du quatrième degré de la forme

$$a'\lambda^4 + 4b'\lambda^3 + 6c'\lambda^2 + 4d'\lambda + e' = 0$$

est

$$(a'e' - 4b'd' + 3c'^2)^3 - 27(a'c'e' + 2b'c'd' - a'd'^2 - e'b'^2 - c'^3)^2 = 0.$$

Appliquant ce résultat à l'équation précédente, on aura,

(¹) M. Darboux a étudié des systèmes triples orthogonaux représentés par une équation analogue à la précédente dans son savant Mémoire sur les coordonnées curvilignes (*Annales scientifiques de l'École Normale*, 1878).

après avoir simplifié et réduit,

$$\left[\frac{\mathrm{ABCD}}{\mathrm{K}} - 64(a\mathrm{BCD} + b\mathrm{ACD} + c\mathrm{ABD} + \ldots)\right.$$
$$\left. + (abc\mathrm{D} + acd\mathrm{B} + \ldots) + \frac{64}{3}(ab\mathrm{CD} + \ldots)^2\right]^3$$
$$- 27\left[\frac{8}{3\mathrm{K}}\mathrm{ABCD}(ab\mathrm{CD} + \ldots)\right.$$
$$+ \frac{16^2}{3}(a\mathrm{BCD} + \ldots)(ab\mathrm{CD} + \ldots)(abc\mathrm{D} + \ldots)$$
$$- 16^2\mathrm{ABCD}(abc\mathrm{D} + \ldots)^2$$
$$\left. - \frac{1}{\mathrm{K}}(a\mathrm{BCD} + \ldots)^2 - \frac{8^3}{27}(ab\mathrm{CD} + ac\mathrm{BD} + \ldots)^3\right] = 0.$$

C'est une équation du douzième ordre en A, B, C, D.

DE L'INTÉGRATION D'UNE CLASSE DE SYSTÈMES D'ÉQUATIONS SIMULTANÉES, LINÉAIRES ET DU PREMIER ORDRE;

PAR M. IBACH,

Licencié ès sciences mathématiques et ès sciences physiques.

I. On sait que la forme la plus générale d'un système d'équations différentielles, linéaires et simultanées du premier ordre est la suivante :

$$(1) \quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + P_1 y + Q_1 z = v_1, \\[2mm] \dfrac{dz}{dx} + P_2 y + Q_2 z = v_2, \end{cases}$$

et la méthode de d'Alembert conduit à démontrer que la résolution d'un pareil système dépend de l'intégration d'une équation différentielle de la forme

$$\frac{du}{dx} + \mathrm{A}u + \mathrm{B}u^2 = \mathrm{C},$$

dans laquelle A, B, C sont des fonctions de x. Or Euler a prouvé que l'on ne peut intégrer cette dernière équation que si l'on en connaît *a priori* une solution parti-

culière. En thèse générale, le problème est donc insoluble; on va voir toutefois qu'en modifiant légèrement la méthode de d'Alembert, on arrive à intégrer facilement une classe nombreuse de systèmes d'équations simultanées.

II. A cet effet, multiplions par les paramètres θ_1 et θ_2 les équations (1); ajoutant ensuite et retranchant tour à tour les équations ainsi obtenues, nous avons

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\theta_1\frac{dy}{dx}+\theta_2\frac{dz}{dx}+y(P_1\theta_1+P_2\theta_2)\\ &\qquad +z(Q_1\theta_1+Q_2\theta_2)=v_1\theta_1+v_2\theta_2,\end{aligned}\right.$$

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\theta_1\frac{dy}{dx}-\theta_2\frac{dz}{dx}+y(P_1\theta_1-P_2\theta_2)\\ &\qquad +z(Q_1\theta_1-Q_2\theta_2)=v_1\theta_1-v_2\theta_2.\end{aligned}\right.$$

Je pose

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \theta_1 y+\theta_2 z&=\xi,\\ \theta_1 y-\theta_2 z&=\zeta;\end{aligned}\right.$$

je différentie ces dernières équations, et j'obtiens

$$(5)\qquad \theta_1\frac{dy}{dx}+\theta_2\frac{dz}{dx}+y\frac{d\theta_1}{dz}+z\frac{d\theta_2}{dx}=\frac{d\xi}{dx},$$

$$(6)\qquad \theta_1\frac{dy}{dx}-\theta_2\frac{dz}{dx}+y\frac{d\theta_1}{dz}-z\frac{d\theta_2}{dx}=\frac{d\zeta}{dx}.$$

Entre les six équations qui précèdent, il est possible d'éliminer les quantités y, z, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$. Pour y parvenir, retranchons d'abord l'équation (5) de l'équation (2) et l'équation (6) de l'équation (3); nous trouvons

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(P_1\theta_1+P_2\theta_2-\frac{d\theta_1}{dx}\right)y\\ &\quad +\left(Q_1\theta_1+Q_2\theta_2-\frac{d\theta_2}{dx}\right)z=v_1\theta_1+v_2\theta_2-\frac{d\xi}{dx},\end{aligned}\right.$$

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(P_1\theta_1-P_2\theta_2-\frac{d\theta_1}{dx}\right)y\\ &\quad +\left(Q_1\theta_1-Q_2\theta_2+\frac{d\theta_2}{dx}\right)z=v_1\theta_1-v_2\theta_2-\frac{d\zeta}{dx},\end{aligned}\right.$$

dans lesquelles il ne reste plus que les quantités y et z.

D'autre part, les équations (4) fournissent immédiatement y et z en fonction de θ_1, θ_2, ξ et ζ,

$$y = \frac{\xi + \zeta}{2\theta_1}, \quad z = \frac{\xi - \zeta}{2\theta_2},$$

de telle sorte que l'élimination proposée se trouvera complètement réalisée si l'on remplace, dans les équations (7) et (8), y et z par leurs valeurs

$$\left(P_1\theta_1 + P_2\theta_2 - \frac{d\theta_1}{dx}\right)\left(\frac{\xi+\zeta}{2\theta_1}\right) + \left(Q_1\theta_1 + Q_2\theta_2 - \frac{d\theta_2}{dx}\right)\left(\frac{\xi-\zeta}{2\theta_2}\right) = v_1\theta_1 + v_2\theta_2 - \frac{d\xi}{dx},$$

$$\left(P_1\theta_1 - P_2\theta_2 - \frac{d\theta_1}{dx}\right)\left(\frac{\xi+\zeta}{2\theta_1}\right) + \left(Q_1\theta_1 - Q_2\theta_2 + \frac{d\theta_2}{dx}\right)\left(\frac{\xi-\zeta}{2\theta_2}\right) = v_1\theta_1 - v_2\theta_2 - \frac{d\zeta}{dx};$$

ou, en ordonnant en ξ et ζ,

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{d\xi}{dx} + \left(\dfrac{P_1\theta_1 + P_2\theta_2 - \dfrac{d\theta_1}{dx}}{2\theta_1} + \dfrac{Q_1\theta_1 + Q_2\theta_2 - \dfrac{d\theta_2}{dx}}{2\theta_2}\right)\xi \\ \quad + \left(\dfrac{P_1\theta_1 + P_2\theta_2 - \dfrac{d\theta_1}{dx}}{2\theta_1} - \dfrac{Q_1\theta_1 + Q_2\theta_2 - \dfrac{d\theta_2}{dx}}{2\theta_2}\right)\zeta = v_1\theta_1 + v_2\theta_2, \end{cases}$$

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{d\zeta}{dx} + \left(\dfrac{P_1\theta_1 - P_2\theta_2 - \dfrac{d\theta_1}{dx}}{2\theta_1} + \dfrac{Q_1\theta_1 - Q_2\theta_2 + \dfrac{d\theta_2}{dx}}{2\theta_2}\right)\xi \\ \quad + \left(\dfrac{P_1\theta_1 - P_2\theta_2 - \dfrac{d\theta_1}{dx}}{2\theta_1} - \dfrac{Q_1\theta_1 - Q_2\theta_2 + \dfrac{d\theta_2}{dx}}{2\theta_2}\right)\zeta = v_1\theta_1 - v_2\theta_2. \end{cases}$$

Ces deux équations ne sont pas plus facilement intégrables que les équations initiales ; mais il faut bien remarquer que, des quatre fonctions ξ, ζ, θ_1 et θ_2, deux sont absolument arbitraires, et que, par conséquent, il est permis de choisir deux d'entre elles, θ_1 et θ_2 par

exemple, de façon à simplifier les équations (9) et (10). Or on peut disposer de θ_1 et de θ_2, de manière à égaler à o le coefficient de ζ dans l'équation (9) et de ξ dans l'équation (10), en écrivant

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{P_1\theta_1 + P_2\theta_2 - \dfrac{d\theta_1}{dx}}{\theta_1} &= \frac{Q_1\theta_1 + Q_2\theta_2 - \dfrac{d\theta_2}{dx}}{\theta_2}, \\ \frac{P_1\theta_1 - P_2\theta_2 - \dfrac{d\theta_1}{dx}}{\theta_1} &= -\frac{Q_1\theta_1 - Q_2\theta_2 + \dfrac{d\theta_2}{dx}}{\theta_2}; \end{aligned}\right.$$

et il est facile de voir qu'on aura ainsi transformé les équations (9) et (10) en équations linéaires de premier ordre, de la forme

$$\frac{d\xi}{dx} + U\xi = M,$$

$$\frac{d\zeta}{dx} + S\zeta = N.$$

Si les équations (11) permettaient de déterminer θ_1 et θ_2, les équations (9) et (10) transformées fourniraient toujours ξ et ζ. Il ne resterait donc plus, pour avoir y et z, qu'à porter dans les équations (4) les valeurs de θ_1, θ_2, ξ et ζ une fois connues, et il est clair que les valeurs de y et z contiendraient deux constantes arbitraires introduites par les intégrations des équations (9) et (10) transformées.

On le voit, toute la solution du problème dépend actuellement des équations (11). Pourra-t-on en tirer des valeurs acceptables de θ_1 et θ_2? C'est ce que nous allons étudier.

A cet effet, ajoutons et retranchons ces équations membre à membre :

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{P_1\theta_1 - \dfrac{d\theta_1}{dx}}{\theta_1} &= \frac{Q_2\theta_2 - \dfrac{d\theta_2}{dx}}{\theta_2}, \\ P_2(\theta_2)^2 - Q_1(\theta_1)^2 &= 0. \end{aligned}\right.$$

De cette dernière équation, on tire

$$\frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{\sqrt{P_2}}{\sqrt{Q_1}};$$

quant à la première, elle peut s'écrire sous la forme

$$P_1 - \frac{\frac{d\theta_1}{dx}}{\theta_1} = Q_1 - \frac{\frac{d\theta_2}{dx}}{\theta_2},$$

et, en l'intégrant immédiatement, on obtient encore

$$\frac{\theta_1}{\theta_2} = e^{\int (P_1 - Q_1)\,dx}.$$

Mais ces deux valeurs de $\frac{\theta_1}{\theta_2}$ doivent être identiques; nous avons donc la relation

$$\text{(A)} \qquad \frac{\sqrt{P_2}}{\sqrt{Q_1}} = e^{\int (P_1 - Q_1)\,dx}.$$

Les équations (11) qui, en thèse générale, sont incompatibles, pourront donc, toutes les fois que la relation (A) sera réalisée, se réduire à la seule

$$\frac{\theta_1}{\sqrt{P_2}} = \frac{\theta_2}{\sqrt{Q_1}},$$

dont on peut conclure que l'on aura trouvé des valeurs acceptables de θ_1 et θ_2, si l'on prend ces valeurs respectivement proportionnelles à $\sqrt{P_2}$ et $\sqrt{Q_1}$.

On peut, pour simplifier, supposer que θ_1 et θ_2 sont respectivement égaux à $\sqrt{P_2}$ et $\sqrt{Q_1}$.

III. Ce qui précède conduit à formuler le théorème suivant :

Le système d'équations différentielles et simultanées de d'Alembert est intégrable toutes les fois qu'entre

les coefficients P_1, P_2, Q_1, Q_2 *des variables* y *et* z, *existe la relation*

$$\text{(A)} \qquad \frac{\sqrt{P_2}}{\sqrt{Q_1}} = e^{\int (P_1 - Q_2)\,dx}.$$

IV. Nous avons dit qu'en employant les hypothèses (11), les équations (9) et (10), qui donnent ξ et ζ, se simplifient; elles deviennent, en effet, dans ce cas,

$$\frac{d\xi}{dx} + \left(\frac{P_1\theta_1 + P_2\theta_2 - \frac{d\theta_1}{dx}}{\theta_1}\right)\xi = v_1\theta_1 + v_2\theta_2,$$

$$\frac{d\zeta}{dx} + \left(\frac{P_1\theta_1 - P_2\theta_2 - \frac{d\theta_1}{dx}}{\theta_1}\right)\zeta = v_1\theta_1 - v_2\theta_2.$$

Ce sont de simples équations linéaires et du premier ordre, d'où l'on tire immédiatement

$$\xi = e^{-\int \frac{P_1\theta_1 + P_2\theta_2 - \frac{d\theta_1}{dx}}{\theta_1} dx}\left[\int (v_1\theta_1 + v_2\theta_2) e^{\int \frac{P_1\theta_1 + P_2\theta_2 - \frac{d\theta_1}{dx}}{\theta_1} dx} + C\right],$$

$$\zeta = e^{-\int \frac{P_1\theta_1 - P_2\theta_2 - \frac{d\theta_1}{dx}}{\theta_1} dx}\left[\int (v_1\theta_1 - v_2\theta_2) e^{\int \frac{P_1\theta_1 - P_2\theta_2 - \frac{d\theta_1}{dx}}{\theta_1} dx} + C'\right]$$

En posant, pour simplifier,

$$\frac{P_1\theta_1 + P_2\theta_2 - \frac{d\theta_1}{dx}}{\theta_1} = \Omega,$$

$$\frac{P_1\theta_1 - P_2\theta_2 - \frac{d\theta_1}{dx}}{\theta_1} = \Psi,$$

j'aurai pour y et z les valeurs suivantes :

$$\text{(B)} \quad \left\{ \begin{aligned} y &= \frac{1}{2\theta_1} e^{-\int \Omega\,dx}\left[\int (v_1\theta_1 + v_2\theta_2) e^{\int \Omega\,dx} + C\right] \\ &\quad + \frac{1}{2\theta_1} e^{-\int \Psi\,dx}\left[\int (v_1\theta_1 - v_2\theta_2) e^{\int \Psi\,dx} + C'\right], \\ z &= \frac{1}{2\theta_1} e^{-\int \Omega\,dx}\left[\int (v_1\theta_1 + v_2\theta_2) e^{\int \Omega\,dx} + C\right] \\ &\quad - \frac{1}{2\theta_1} e^{-\int \Psi\,dx}\left[\int (v_1\theta_1 - v_2\theta_2) e^{\int \Psi\,dx} + C'\right]. \end{aligned} \right.$$

Dans le cas particulier où il n'y a pas de seconds membres, c'est-à-dire si v_1 et v_2 sont égaux à o, ces valeurs se simplifient encore et deviennent

$$(C)\quad \begin{cases} y = \dfrac{Ce^{-\int \Omega\, dx} + C'e^{-\int \Psi\, dx}}{2\theta_1}, \\[2ex] z = \dfrac{Ce^{-\int \Omega\, dx} - C'e^{-\int \Psi\, dx}}{2\theta_1}. \end{cases}$$

IV. L'étude de la relation (A) conduit aux remarques suivantes :

Remarque I. — La relation (A) ne contenant pas trace des seconds membres v_1 et v_2, on peut en conclure que la difficulté d'intégrer un système d'équations différentielles et simultanées n'est pas augmentée par la complication de leurs seconds membres.

Remarque II. — Si nous supposons que P_1, P_2, Q_1, Q_2 sont des constantes, la relation (A) est *identiquement* vérifiée. Nous nous retrouvons donc ici en présence de ce résultat connu, que le système d'équations (1) est intégrable dans le cas où les coefficients sont constants.

Remarque III. — Si nous posons $P_2 = 0$, $Q_1 = 0$, la condition (A) est encore *identiquement* vérifiée. Il est facile de constater en effet que, dans ce cas, les équations du système initial deviennent de simples équations linéaires et du premier ordre, l'une en y, et l'autre en z, qu'il est possible d'intégrer immédiatement.

Remarque IV. — D'une manière générale, la condition (A) étant une relation entre les quantités P_1, P_2, Q_1, Q_2, si nous en choisissons trois d'une manière arbitraire, la quatrième se trouve déterminée, soit immédiatement, soit par une quadrature.

V. Avant de terminer, observons encore que, dans le cas particulier où $P_1 = Q_2$, la relation (A) indique qu'il

suffit, pour rendre intégrable le système fondamental, que les deux autres coefficients soient dans un rapport constant. Nous pouvons donc formuler le théorème suivant :

Théorème II. — *Si le coefficient d'une variable dans une des équations* (1) *est égal au coefficient de l'autre variable dans l'autre, et que le rapport des deux autres coefficients soit constant, le système d'équations de d'Alembert est intégrable par la méthode précédente.*

VI. Nous allons, pour achever, donner de cette méthode quelques applications qui ne sont peut-être pas sans intérêt.

Application I. — Soit à intégrer le système

$$\frac{dy}{dx} + xy + x^2 z = 0,$$
$$\frac{dz}{dx} + a^2 x^2 y + xz = 0.$$

La condition (A), en observant que x correspond à P_1, $(a^2 x^2)$ à P_2, x^2 à Q_1, x à Q_2 et que ν_1 et ν_2 sont nuls, la condition (A) se trouve vérifiée (théorème II).

Les fonctions θ_1 et θ_2, qui, dans le cas général, sont égales à $\sqrt{P_2}$ et $\sqrt{Q_1}$, sont par conséquent représentées respectivement par ax et x.

Par conséquent encore

$$\Omega = \frac{P_1\theta_1 + P_2\theta_2 - \dfrac{d\theta_1}{dx}}{\theta_1} = ax^2 + x - \frac{1}{x},$$

$$\Psi = \frac{P_1\theta_1 - P_2\theta_2 - \dfrac{d\theta_1}{dx}}{\theta_1} = -ax^2 + x - \frac{1}{x}.$$

Comme les équations proposées n'ont pas de seconds

membres, les formules (C) donnent immédiatement

$$y = \frac{C e^{\log x - \frac{x^2}{2} - \frac{ax^3}{3}} + C' e^{\log x - \frac{x^2}{2} + \frac{ax^3}{3}}}{2ax},$$

$$z = \frac{C e^{\log x - \frac{x^2}{2} - \frac{ax^3}{3}} - C' e^{\log x - \frac{x^2}{2} + \frac{ax^3}{3}}}{2ax}.$$

Application II. — Soit à intégrer le système

$$\frac{dy}{dx} + e^{2x} z = v_1,$$

$$\frac{dz}{dx} + a^2 e^{2x} y = v_2.$$

Ici

$$P_1 = 0, \quad Q_2 = 0, \quad P_2 = a^2 e^{2x}, \quad Q_1 = e^{2x},$$

donc

$$\theta_1 = ae^x, \quad \theta_2 = e^x,$$

donc encore

$$\Omega = ae^{2x} - 1, \quad \Psi = -ae^{2x} - 1;$$

y et z sont fournis par les formules (B) :

$$y = \frac{1}{2ae^x} e^{x - \frac{ae^{2x}}{2}} \left[\int (v_1 a + v_2) e^x e^{\frac{ae^{2x}}{2} - x} + C \right]$$

$$+ \frac{1}{2ae^x} e^{x + \frac{a}{2} e^{2x}} \left[\int e^x (v_1 a + v_2) e^{-x - \frac{a}{2} e^{2x}} + C' \right],$$

$$z = \frac{1}{2ae^x} e^{x - \frac{ae^{2x}}{2}} \left[\int (v_1 a + v_2) e^x e^{\frac{ae^{2x}}{2} - x} + C \right]$$

$$- \frac{1}{2ae^x} e^{x + \frac{a}{2} e^{2x}} \left[\int e^x (v_1 a + v_2) e^{-x - \frac{a}{2} e^{2x}} + C \right].$$

Application III. — Soit à intégrer le système

$$\frac{dy}{dx} + \frac{e^x + 1}{x} y + z = 0,$$

$$\frac{dz}{dx} + x^2 y + \frac{e^x}{x} z = 0.$$

La condition (A) est vérifiée. En effet,

$$\frac{\sqrt{P_2}}{\sqrt{Q_1}} = \frac{x}{1} = x.$$

D'autre part,

$$P_1 - Q_2 = \frac{1}{x};$$

donc

$$\int (P_1 - Q_2)\,dx = \log x,$$

de plus

$$e^{\log x} = x;$$

nous avons donc

$$\frac{\sqrt{P_2}}{\sqrt{Q_1}} = e^{\int (P_1 - Q_2)\,dx}.$$

Les seconds membres étant nuls, on a, d'après les formules (C), en remplaçant Ω et Ψ par les valeurs

$$\Omega = \frac{e^x + 1 + x^2 - 1}{x} = \frac{e^x + x^2}{x},$$

$$\Psi = \frac{e^x + 1 - x^2 - 1}{x} = \frac{e^x - x^2}{x},$$

et

$$y = \frac{C e^{-\int \frac{e^x + x^2}{x} dx} + C' e^{-\int \frac{e^x - x^2}{x} dx}}{2x},$$

$$z = \frac{C e^{-\int \frac{e^x + x^2}{x} dx} - C' e^{-\int \frac{e^x - x^2}{x} dx}}{2x}.$$

SUR LES COURBES UNICURSALES DU QUATRIÈME ORDRE, DONT ON CONNAIT LES TROIS POINTS DOUBLES ET CINQ POINTS;

Par M. A. ASTOR,

Chargé de Cours à la Faculté des Sciences de Grenoble.

---

1. On peut établir, entre les courbes unicursales du quatrième ordre et les coniques, un mode de correspondance fort simple dont nous nous rendrons compte en résolvant le problème suivant :

L'un des foyers d'une conique inscrite à un triangle

donné décrivant une conique donnée, trouver le lieu de l'autre foyer.

Si nous prenons le triangle pour triangle de référence, et si nous appelons X, Y, Z, X_1, Y_1, Z_1 les coordonnées des deux foyers d'une conique inscrite au triangle, nous aurons les relations connues

$$XX_1 = YY_1 = ZZ_1.$$

Si (X_1, Y_1, Z_1) décrit la conique S,

$$\begin{aligned} S = {} & AX_1^2 + A'Y_1^2 + A''Z_1^2 \\ & + 2BY_1Z_1 + 2B'Z_1X_1 + 2B''X_1Y_1 = 0, \end{aligned}$$

on aura, entre les coordonnées de l'autre foyer, la relation

$$(1) \qquad \frac{A}{X^2} + \frac{A'}{Y^2} + \frac{A''}{Z^2} + \frac{2B}{YZ} + \frac{2B'}{ZX} + \frac{2B''}{XY} = 0.$$

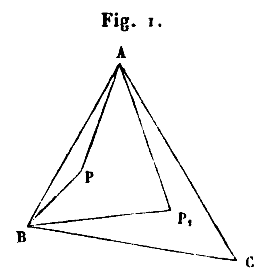
Cette équation représente toutes les courbes unicursales du quatrième ordre dont les trois sommets du triangle donné sont les trois points doubles; car on peut déterminer les cinq coefficients qui y entrent de manière que la courbe passe par cinq points pris en dehors des trois côtés du triangle. Dans ce procédé de transformation des figures, à une droite corrrespond une conique circonscrite au triangle et réciproquement.

Pour abréger, nous appellerons U les courbes (1) et Σ les coniques circonscrites au triangle. U est indécomposable en même temps que S; or S n'est une véritable conique que tout autant que trois de ses points ne sont pas en ligne droite; dès lors U ne peut avoir trois points sur une conique Σ; et si l'on se donne cinq points en dehors des trois côtés et satisfaisant à cette condition, ils détermineront effectivement une courbe U, car leurs correspondants détermineront une conique effective S.

2. Voici une construction géométrique très simple pour avoir le point correspondant à un point donné.

Soient ABC (*fig.* 1) le triangle donné et P un point de son plan; joignons AP et BP, et menons les droites également inclinées sur une même bissectrice des angles A

Fig. 1.



et B, ces droites se rencontreront au point P_1 correspondant à P; P et P_1 coïncideront donc si l'un d'eux est le centre d'un cercle inscrit ou exinscrit au triangle ABC.

On pourrait aussi prendre le symétrique de P par rapport au centre du cercle passant par les projections de P sur les trois côtés, et cette construction montre que, si P est sur le cercle circonscrit au triangle, P_1 sera à l'infini sur la perpendiculaire menée de P à la droite de Simson qui lui correspond. Cette remarque nous sera utile par la suite.

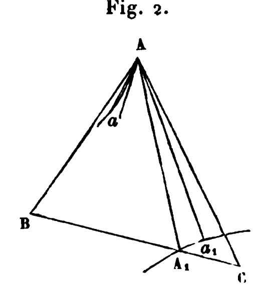
Si P est sur l'un des côtés, P_1 est au sommet opposé. En général, comme nous l'avons vu, à une droite correspond une conique Σ; mais, si la droite passe par l'un des sommets, AP par exemple, la conique correspondante se décompose en un système de deux droites, dont l'une est le côté opposé BC, et l'autre la droite AP_1 qui, à proprement parler, correspond seule à AP.

3. *Construction par points de* U, *quand on en connaît cinq points.* — Construisons les cinq points cor-

respondant aux points donnés; ils déterminent la conique S, dont nous pourrons, par les procédés ordinaires, avoir autant de points que nous voudrons; construisant les points correspondant à ces derniers, nous aurons autant de points de U que nous le désirerons. Nous pouvons avoir également la tangente en un point a de U; car, si nous prenons le point a_1 de S qui lui correspond, à la tangente à S en a_1 correspond une conique Σ tangente à U en a, et si l'on cherche un autre point b de cette conique correspondant à un second point b_1 de la tangente, on pourra avoir la tangente en a à la conique Σ qui passe par les points a et b, c'est-à-dire la tangente en a à U.

4. *Construction des tangentes aux points doubles.* — Considérons une branche Aa de U (*fig.* 2) : il lui cor-

Fig. 2.



respond un élément $A_1 a_1$ de S partant de l'un des points A_1 de rencontre de S avec BC; or on a

$$a\mathrm{AB} = a_1\mathrm{AC};$$

en passant à la limite, on voit que la tangente en A à Aa est la droite correspondant à AA_1. Pour avoir les tangentes aux trois sommets, il suffit donc de prendre les points de rencontre de S avec l'un des côtés et de construire les droites qui correspondent à celles qui joignent ces points au sommet opposé.

Si BC rencontre S en deux points réels et distincts, A est un point double réel ordinaire; si BC est tangente à S, A est un point de rebroussement, et si D est le point de contact, la tangente de rebroussement sera la droite conjuguée de AD; d'où nous déduisons que, si U a trois points de rebroussement, les trois tangentes de rebroussement sont concourantes, car S est alors inscrite à ABC, et les droites qui joignent les sommets aux points de contact des côtés opposés sont concourantes; il en est de même, comme on le sait, pour leurs conjuguées.

Nous pouvons avoir, relativement aux six tangentes à U aux trois points doubles, un théorème général, dont le précédent est un cas particulier. Soient D, D' les points de rencontre de S avec BC, D_1, D'_1 les points où BC est rencontrée par les droites conjuguées de AD et AD'; il est facile de voir que les six points D_1, D'_1 et les analogues sont situés sur une deuxième conique.

Soit

$$S = AX^2 + A'Y^2 + A''Z^2 + 2BYZ + 2B'ZX + 2B''XY = 0,$$

et considérons la conique dont l'équation est

$$\begin{aligned} S' = A'A''X^2 + A''AY^2 + AA'Z^2 \\ + 2ABYZ + 2A'B'ZX + 2A''B''XY = 0. \end{aligned}$$

Si nous faisons $Z = 0$ dans les deux équations, nous obtenons, pour les deux couples de droites joignant les points de rencontre de S et S' avec Z au sommet XY, les équations

$$\begin{aligned} AX^2 + A'Y^2 + 2B''XY = 0, \\ A'X^2 + AY^2 + 2B''XY = 0, \end{aligned}$$

et ce sont bien deux couples de droites conjuguées. Il en est de même pour les autres, et nous pouvons dès lors dire que :

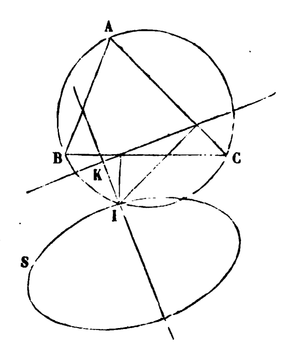
Les six tangentes à une courbe unicursale du qua-

trième ordre en ses trois points doubles coupent les trois côtés du triangle formé par les trois points doubles en six points situés sur une conique.

De sorte que, comme on pouvait le prévoir, la connaissance de cinq de ces tangentes entraîne celle de la sixième. Ce théorème comprend, comme cas particulier, celui qui est relatif aux courbes à trois rebroussements.

5. *Construction des asymptotes.* — Soit I (*fig.* 3) un point commun à S et au cercle circonscrit. Nous avons vu qu'au point I correspond un point à l'infini de

Fig. 3.



U; la direction asymptotique est la perpendiculaire IK menée à la droite de Simson correspondant à I.

Supposons construite l'asymptote, sa transformée sera une conique Σ tangente à S en I, ce qui la détermine. La parallèle à IK menée par un point correspondant à un point quelconque de cette conique sera l'asymptote. Une construction très simple consistera à chercher, au moyen du théorème de Pascal, la tangente à cette conique en l'un des sommets, A par exemple; la droite conjuguée de cette tangente coupera BC en un point de la transformée, c'est-à-dire de l'asymptote.

On aura donc les asymptotes de la courbe, si l'on connaît les points de rencontre de S et du cercle circonscrit. Si S était tangente au cercle circonscrit, deux asymptotes deviendraient parallèles; la conique Σ considérée devient le cercle circonscrit lui-même dont la transformée est la droite de l'infini; les deux asymptotes s'éloignent donc à l'infini, ce qu'on pouvait prévoir; car, si elles restaient à distance finie, U aurait quatre points doubles, ce qui est impossible. Si S était osculatrice au cercle circonscrit, trois asymptotes iraient à l'infini; les quatre iraient à l'infini dans une même direction si S et le cercle circonscrit étaient deux courbes surosculatrices, c'est-à-dire si l'osculation avait lieu en un sommet de S.

6. *Points d'inflexion.* — A une tangente à U correspond une Σ tangente à S; à une tangente d'inflexion à U correspond une Σ osculatrice à S; on aura donc les points d'inflexion de U en transformant les points de contact de S avec les Σ qui lui sont osculatrices. Il est facile dès lors d'avoir une courbe sur laquelle sont situés les points d'inflexion de U.

Soit, en effet,

$$S = AX^2 + A'Y^2 + A''Z^2 + 2BYZ + 2B'ZX + 2B''XY = 0;$$

l'équation d'une conique osculatrice à S au point (x, y, z) sera

$$S + (XS'_x + YS'_y + ZS'_z)(lX + mY + nZ) = 0,$$

si l'on a

$$lx + my + nz = 0.$$

Pour que la conique soit une Σ, il faudra que

$$\begin{aligned} A + lS'_x &= 0, \\ A' + mS'_y &= 0, \\ A'' + nS'_z &= 0, \end{aligned}$$

et, par suite, il y a six points donnés par l'intersection de S avec la cubique

$$\frac{AX}{S'_X} + \frac{A'Y}{S'_Y} + \frac{A''Z}{S'_Z} = 0.$$

Il y a donc six points d'inflexion, qui sont donnés par l'intersection de U avec la courbe du sixième ordre

$$\frac{AYZ}{AYZ + B''ZX + B'XY} + \frac{A'ZX}{B''YZ + A'ZX + BXY} + \frac{A''XY}{B'YZ + BZX + A''XY} = 0.$$

Cette courbe, bien plus commode que la hessienne, a trois points triples aux sommets du triangle de référence; elle coupe U en six points confondus en chacun de ces sommets et six points distincts de ces derniers qui sont les six points d'inflexion.

7. Dans le procédé de transformation employé, à une droite $a_1 b_1$ correspond une conique Σ passant par a et b conjugués de a_1 et b_1; nous la désignerons par Σab. Au point de rencontre de deux droites $a_1 b_1$, $c_1 d_1$, correspond le quatrième point commun à Σab, Σcd. A la tangente en a_1 à S correspond une conique Σ tangente à U en a; nous la désignerons par Σa^2.

De cette réciprocité naissent un grand nombre de théorèmes, dont nous allons énoncer quelques-uns :

1° *Il n'y a qu'une conique* S *tangente à cinq droites; il n'existe qu'une courbe* U *tangente à cinq coniques* Σ.

Le théorème corrélatif du théorème de Pascal est le suivant :

Six points de U *étant considérés dans l'ordre* $abcdef$, *les quatrièmes points communs aux trois groupes de coniques* (Σab, Σde), (Σbc, Σef), (Σcd, Σfa) *sont sur une même conique* Σ.

Transformons le théorème de Brianchon :

Considérons six Σ *tangentes à* U, *et leurs quatrièmes points communs successifs ; en les numérotant dans l'ordre* 1, 2, 3, 4, 5, 6, *les coniques* Σ_{14}, Σ_{25}, Σ_{36} *ont un quatrième point commun.*

On sait que les six sommets d'un hexagone circonscrit à S sont sur une même conique : donc, si l'on considère les six coniques Σa^2, Σb^2, Σc^2, Σd^2, Σe^2, Σf^2, dans l'ordre circulaire indiqué, chacune coupe la suivante en un point, et les six points ainsi obtenus sont sur une même courbe U.

Citons encore, comme exemple de ces transformations, qui sont, comme on le voit, en nombre indéfini, le théorème suivant :

Deux côtés d'un triangle inscrit dans S *passent par deux points fixes* p_1, q_1 ; *le troisième côté enveloppe une conique* S_1 *bitangente à* S *en ses points de rencontre avec la droite* pq.

Théorème corrélatif :

Si l'on prend un point quelconque a sur une courbe U, *et deux points* p, q *de son plan, les coniques* Σap, Σaq *rencontrent* U *en deux nouveaux points* b *et* c; *l'enveloppe de* Σbc *est une courbe* U_1 *bitangente à* U *en ses points de rencontre avec* Σpq.

8. Cette transformation des figures conduit à une propriété remarquable des droites de Simson, à savoir que [1] :

Les droites de Simson sont les asymptotes des hyperboles équilatères circonscrites au triangle.

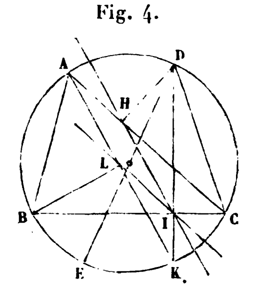
---

[1] *Voir* Weill, *Journal de Mathématiques spéciales*, 2ᵉ série, t. III, p. 16. Ch. B.

Quelques préliminaires seront utiles pour la démonstration. Au centre du cercle circonscrit correspond, d'après une propriété bien connue, le point de concours des hauteurs; donc à un diamètre DE du cercle circonscrit correspond une conique Σ passant par le point de concours des hauteurs, c'est-à-dire une hyperbole équilatère; les asymptotes de cette conique sont perpendiculaires aux droites de Simson relatives aux points D et E, ce qui nous montre que les droites de Simson correspondant à deux points diamétralement opposés sont rectangulaires.

Menons la droite de Simson IH (*fig.* 4) correspondant

Fig. 4.



à D et joignons A au deuxième point K de rencontre de DI avec le cercle; IH et AK sont parallèles.

En effet, dans le quadrilatère inscriptible DHIC, on a

$$\widehat{IHC} = \widehat{IDC},$$

et par suite

$$\widehat{IHC} = \widehat{KAC},$$

ce qui démontre la proposition.

Du point B menons BL perpendiculaire à AK, et joignons IL; en vertu du théorème précédent, cette droite est parallèle à AC, car c'est la droite de Simson relative à B pour le triangle AKD.

Cela posé, considérons l'hyperbole Σ asymptote à IH, et cherchons, au moyen du théorème de Pascal, son second point de rencontre avec BL. Pour cela, numérotons 1, 2 les deux points à l'infini suivant IH, 3, 4, 5 les sommets du triangle dans l'ordre ACB, et 6 le point inconnu; les points de rencontre de (12), (45), c'est-à-dire I, de (23), (56), c'est-à-dire L, et de (34), (61) sont en ligne droite; donc ce dernier est à l'infini, puisque (34), c'est-à-dire AC, est parallèle à IM. Or la droite 61 n'est point parallèle à AC, car elle est parallèle à IH; donc 61 est tout entière à l'infini, c'est-à-dire que la deuxième direction asymptotique est perpendiculaire à la première, et l'hyperbole est équilatère; de sorte que, d'après une propriété connue, si l'on prend les droites de Simson correspondant aux extrémités d'un diamètre, elles se coupent à angle droit sur le cercle des neuf points.

9. Cette propriété des droites de Simson se démontre aisément par le calcul de la façon suivante :

Prenons pour axes deux côtés du triangle; les équations de deux droites rectangulaires étant

$$\alpha x + \beta y - 1 = 0,$$
$$(\beta - \alpha\cos\theta)x - (\alpha - \beta\cos\theta)y + \lambda = 0,$$

l'équation de l'hyperbole équilatère dont ces droites sont les asymptotes et qui passe par l'origine sera

$$(\alpha x + \beta y - 1)[(\beta - \alpha\cos\theta)x - (\alpha - \beta\cos\theta)y + \lambda] + \lambda = 0.$$

Appelant a et b les longueurs des deux côtés dirigés suivant Ox et Oy, nous aurons, pour exprimer que l'hyperbole est circonscrite au triangle, les équations

$$(1)\qquad \begin{cases} a = \dfrac{1}{\alpha} - \dfrac{\lambda}{\beta - \alpha\cos\theta}, \\ b = \dfrac{1}{\beta} + \dfrac{\lambda}{\alpha - \beta\cos\theta}. \end{cases}$$

Les équations des perpendiculaires à Ox et Oy en leurs points de rencontre avec la droite

$$\alpha x + \beta y - 1 = 0$$

sont

$$y = -\frac{1}{\cos\theta}\left(x - \frac{1}{\alpha}\right),$$

$$y - \frac{1}{\beta} = -x\cos\theta.$$

Appelant x_1 et y_1 les coordonnées de leur point de rencontre, nous avons à montrer que ce point est sur le cercle circonscrit, c'est-à-dire que

$$x_1^2 + y_1^2 + 2x_1y_1\cos\theta - ax_1 - by_1 = 0.$$

Or on a

$$x_1 + y_1\cos\theta = \frac{1}{\alpha},$$

$$x_1\cos\theta + y_1 = \frac{1}{\beta};$$

d'où

$$x_1^2 + y_1^2 + 2x_1y_1\cos\theta = \frac{x_1}{\alpha} + \frac{y_1}{\beta},$$

et

$$x_1^2 + y_1^2 + 2x_1y_1\cos\theta - ax_1 - by_1$$
$$= \left(\frac{1}{\alpha} - a\right)x_1 + \left(\frac{1}{\beta} - b\right)y_1;$$

d'autre part,

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} x_1 &= \frac{\beta - \alpha\cos\theta}{\alpha\beta\sin^2\theta},\\ y_1 &= \frac{\alpha - \beta\cos\theta}{\alpha\beta\sin^2\theta},\end{aligned}\right.$$

et, en vertu de (1),

$$\left(\frac{1}{\alpha} - a\right)x_1 + \left(\frac{1}{\beta} - b\right)y_1 = \lambda\left(\frac{x_1}{\beta - \alpha\cos\theta} - \frac{y_1}{\alpha - \beta\cos\theta}\right) = 0,$$

ce qui démontre le théorème.

En éliminant λ entre les équations (1), on a la relation

$$\frac{a - \frac{1}{\alpha}}{b - \frac{1}{\beta}} = - \frac{\alpha - \beta \cos\theta}{\beta - \alpha \cos\theta},$$

qui est l'équation tangentielle de l'enveloppe des droites de Simson représentées par l'équation

$$\alpha x + \beta y - 1 = 0.$$

On voit que cette enveloppe est une courbe de la troisième classe, dont il serait aisé d'avoir l'équation en coordonnées rectilignes.

10. Nous avons supposé jusqu'ici que la courbe U a ses trois points doubles réels. Or il peut y en avoir deux imaginaires conjugués. Dans ce cas, on peut considérer ces derniers comme résultant de l'intersection d'une droite et d'un cercle réels et les projeter suivant les deux ombilics du plan de projection. Les courbes considérées peuvent donc être regardées comme les projections de courbes unicursales du quatrième ordre ayant pour points doubles, d'une part un point donné, d'autre part les ombilics du plan, et, au point de vue des propriétés projectives, ces dernières peuvent remplacer les premières, comme le cercle peut remplacer la conique.

Si nous revenons au procédé de transformation employé, le triangle de référence est formé par la droite de l'infini et les deux droites isotropes issues du point double réel, et, en plaçant l'origine des coordonnées rectangulaires en ce dernier point, les formules de transformation sont

$$X + iY = \frac{K^2}{x + iy} = \frac{K^2(x - iy)}{x^2 + y^2},$$

$$X - iY = \frac{K^2}{x - iy} = \frac{K^2(x + iy)}{x^2 + y^2},$$

x, y, X, Y étant les coordonnées des deux points correspondants. On en déduit

$$X = \frac{K^2 x}{x^2 + y^2}, \quad Y = \frac{K^2 y}{x^2 + y^2},$$

de sorte que la courbe XY est la transformée, par rayons vecteurs réciproques, de la courbe xy que l'on a fait tourner de 180° autour du point double réel pris pour pôle de transformation.

Donc les transformées par rayons vecteurs réciproques des coniques sont des courbes unicursales du quatrième ordre, et les propriétés démontrées pour ces dernières donnent des propriétés correspondantes de ces transformées, pourvu qu'on modifie convenablement les énoncés.

Par exemple, le théorème de Pascal se transforme ici en le suivant :

Si, sur la transformée par rayons vecteurs réciproques d'une conique, on prend six points quelconques dans l'ordre abcdef, les couples de cercles passant par le pôle de transformation et par les points (ab, de), (bc, ef), (cd, fa) se coupent en trois points qui, avec le pôle de transformation, sont sur un même cercle.

NOTE SUR LA CONSTRUCTION DES PLANS TANGENTS D'UNE SURFACE DE RÉVOLUTION QUI PASSENT PAR UNE DROITE DONNÉE;

PAR M. ROUQUET,

Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée de Toulouse.

La détermination des plans tangents d'une surface de révolution qui passent par une droite donnée peut se

ramener au problème suivant de Géométrie plane : *Mener une tangente commune à la méridienne de la surface et à une hyperbole dont l'un des axes de figure coïncide avec l'axe de la surface de révolution proposée.*

Soit D la droite donnée, L la trace de l'un des plans tangents demandés sur le plan méridien P du point de contact, et A le point de rencontre de D avec L. Nous nous proposons de déterminer cette droite L, qui est tangente à la courbe méridienne, en un point B qui n'est autre que le point de contact du plan tangent cherché.

Concevons l'hyperboloïde de révolution engendré par la droite D tournant autour de l'axe. La droite L étant la projection de D sur le plan P, puisque ce plan méridien est perpendiculaire sur le plan tangent (D, L), cette droite L *sera tangente*, par cela même, à l'hyperbole méridienne située dans le plan P, en son point de rencontre A avec D, et, comme elle est déjà tangente en B à la méridienne de la surface, L est une tangente commune aux deux courbes dont nous venons de parler.

Pour la construire, rabattons le plan inconnu P sur un plan méridien fixe, par une rotation autour de l'axe. La méridienne de la surface proposée et celle de l'hyperboloïde auxiliaire sont connues, de telle sorte qu'en leur menant une tangente commune, on obtiendra le rabattement L_1 de L.

Il ne reste plus qu'à mettre cette droite en position. Pour y parvenir, nous remarquerons que les points A_1 et B_1, où L_1 touche l'hyperbole et la méridienne, sont les rabattements des points A et B précédemment définis. On fera donc tourner la droite L_1 autour de l'axe, jusqu'à ce que le point de contact A'_1 de cette droite avec l'hyperbole vienne se placer sur la droite D, ce qui est possible *d'une seule manière*, puisque la droite D appartient à l'hyperboloïde considéré.

En résumé, la construction est la suivante :

1° On trace l'hyperbole méridienne de la surface gauche de révolution engendrée par la droite D tournant autour de l'axe;

2° On mène une tangente commune à cette hyperbole et à la méridienne de la surface contenue dans le même plan méridien;

3° Enfin on fait tourner cette tangente commune autour de l'axe, jusqu'à ce que son point de contact avec l'hyperbole méridienne soit venue se placer sur la droite D.

La nouvelle position de cette tangente est la trace du plan tangent cherché sur le plan méridien correspondant, et le point de contact du plan tangent est la position qu'occupe, après la rotation dont nous venons de parler, le point de contact de la tangente commune avec la méridienne de la surface proposée.

Remarque I. — Chaque tangente commune donne une seule solution, et deux tangentes communes symétriques par rapport à l'axe fournissent le même plan tangent.

Remarque II. — Si la tangente commune L_1 est l'asymptote de l'hyperbole méridienne, les points A_1 et A sont rejetés à l'infini, et le plan P est parallèle à D, ce qui le détermine complètement. La droite L est toujours la projection de D sur le plan P.

RELATION ENTRE LES DISTANCES DEUX A DEUX DE QUATRE POINTS D'UN CERCLE OU DE CINQ POINTS D'UNE SPHÈRE;

PAR M. H. FAURE.

Lorsqu'il s'agit de trouver ces relations en évitant l'emploi de la multiplication des déterminants, on peut

employer le procédé suivant : soient

$$A = B = C = D = 0$$

les équations de quatre cercles, mises sous la forme ordinaire $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$.

L'équation

$$(1) \qquad aA + bB + cC + dD = 0,$$

dans laquelle a, b, c, d sont des constantes, représentera un cercle quelconque. Prenons quatre points sur ce cercle et désignons par A_r, B_r, C_r, D_r les puissances de l'un de ces points r par rapport aux cercles A, B, C, D. On aura

$$aA_r + bB_r + cC_r + dD_r = 0.$$

Donnons à r les valeurs 1, 2, 3, 4, puis éliminons les constantes entre les quatre équations ainsi obtenues; on obtient la relation

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Supposons maintenant que les cercles A, B, C, D aient respectivement pour centre les points 1, 2, 3, 4 et que de plus leurs rayons soient nuls, on aura la relation cherchée.

La même démonstration s'applique à cinq points d'une sphère.

Remarque. — Si, au lieu de considérer quatre cercles A, B, C, D, on en suppose un nombre quelconque n, on trouvera, de la même manière, au lieu du déterminant (1), un déterminant à n^2 éléments, duquel nous déduirions une relation entre les carrés des distances de n points pris sur un cercle ou sur une sphère. Si généra-

lement on désigne par rs la distance de deux points, on arrive à la relation

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} 0 & (12)^2 & (13)^2 & \dots & (1n)^2 \\ (21)^2 & 0 & (23)^2 & \dots & (2n)^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (n1)^2 & (n2)^2 & (n3)^2 & \dots & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

On peut, au moyen de la transformation inverse, déduire de là une relation entre les carrés des distances d'un nombre $n-1$ de points situés sur une droite ou sur un plan. Prenons pour pôle de transformation le dernier point n, puis divisons tous les termes du déterminant (2) par les termes correspondants de la $n^{\text{ième}}$ ligne, sauf par le dernier 0; divisons ensuite les termes des déterminants par les termes de la $n^{\text{ième}}$ colonne, sauf par le dernier 0; un terme quelconque $(rs)^2$ du déterminant devient $\frac{(rs)^2}{(nr)^2(ns)^2}$ et, d'après la propriété fondamentale de la transformation inverse, ce terme a pour valeur le carré de la distance des points transformés de r et s multiplié par une constante. Si donc nous conservons les mêmes lettres pour indiquer les points transformés, nous aurons entre les distances d'un nombre quelconque de points pris sur une droite ou sur un plan la relation

$$\begin{vmatrix} 0 & (12)^2 & (13)^2 & \dots & 1 \\ (21)^2 & 0 & (23)^2 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Il résulte évidemment de la démonstration que sur une droite le nombre des points est au moins égal à 3 et sur un plan au moins égal à 4.

NOUVELLE REMARQUE SUR LE SYSTÈME PEAUCELLIER;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE,
Élève-Ingénieur des Ponts et Chaussées.

Nous avons, en 1881, publié dans les *Nouvelles Annales* (2e série, t. XX, p. 456), une Note où nous déterminions les rapports des vitesses à considérer dans l'appareil du général Peaucellier, lorsqu'on applique cet appareil à la transformation d'un mouvement circulaire en un mouvement rectiligne.

Nous avons fait voir que, si BP est la parallèle à O'D, menée par le point B, on a entre la vitesse angulaire ω autour du point O' et la vitesse rectiligne V le long de BB', à l'instant considéré, la relation

$$V = \omega . BP.$$

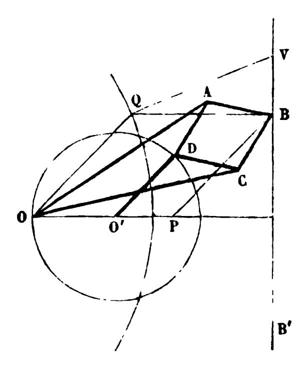
M. Liguine a donné une nouvelle démonstration de ce théorème (*Nouvelles Annales,* 3e série, t. I, p. 153) et M. Resal l'a exposé dans son Cours à l'École Polytechnique (2e division, 1881-82, p. 152 des feuilles lithographiées). Nous pensons donc qu'il n'est pas sans intérêt de montrer comment une très légère modification permet de donner à ce théorème une forme beaucoup plus expressive, mettant en relief la loi de variation du rapport des deux vitesses.

Il suffit de mener par le point O la parallèle OQ à BP, et par le point B la parallèle BQ à OP, droite qui est perpendiculaire à BB'.

Le triangle OPB étant isoscèle, comme semblable au triangle OO'D, la figure OPBQ est un losange et BQ = OQ; donc *le lieu du point Q est une parabole*

ayant le point O *pour foyer et la droite* DD′ *pour directrice.*

Si nous supposons cette parabole tracée, il suffit, pour une position quelconque du point B, d'*élever à* BB′ *la*



perpendiculaire BQ, *limitée à la parabole et de diviser la vitesse du point* B *par* BQ *pour avoir, au même instant, la vitesse angulaire de* O′D.

On peut avoir une représentation géométrique de cette vitesse angulaire, en joignant le point Q à l'extrémité V du segment BV qui représente la vitesse du point B ; on a alors

$$\omega = \operatorname{tang} VQB.$$

Cette représentation, à l'aide d'une parabole, du rapport des vitesses V et ω fait voir immédiatement quelle loi doit suivre l'une des deux vitesses pour que l'autre soit constante.

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1882.

Mathématiques élémentaires.

Un pentagone ABCMD se déforme en satisfaisant aux conditions suivantes : Les sommets A et B restent fixes ;

les cinq côtés conservent chacun la même longueur, enfin les angles variables ADM, BCM comptés dans un même sens de rotation restent constamment égaux entre eux.

Sur le côté MC on construit un triangle MCE semblable au triangle MDA, le côté MC ayant pour homologue AD; sur le côté MD on construit un triangle MDF semblable au triangle MCB, le côté MD ayant pour homologue BC; le pentagone se déformant dans les conditions ainsi définies, on propose :

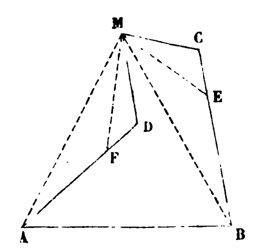
1° D'étudier les variations de la longueur EF;

2° De trouver le lieu décrit par le sommet M;

3° De trouver les conditions nécessaires pour que le point M décrive une droite Δ;

4° De trouver les conditions nécessaires pour que la droite Δ passe par le sommet A;

5° Le point M décrivant une droite Δ passant par le sommet A, on considère le cas particulier où les deux



côtés AD, MD du pentagone sont égaux entre eux, et l'on demande le lieu que décrit alors un point quelconque invariablement lié au côté mobile MD du pentagone.

Philosophie.

Les points A, B, C sont les sommets d'un triangle, les points A_1, B_1, C_1 les milieux des côtés du triangle ABC, les points A_2, B_2, C_2 les milieux des côtés du triangle

$A_1B_1C_1$ et ainsi de suite indéfiniment. On prend, en dehors du plan ABC, un point quelconque P que l'on joint aux sommets des divers triangles ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, ... Représentons par S, S_1, S_2, ... les sommes des carrés des droites menées de P aux sommets de ces triangles successifs, et par T la somme des carrés des côtés du triangle ABC. On demande d'exprimer à l'aide de S et de T l'une quelconque des sommes S_1, S_2, ...

Seconde.

Algèbre. — Inscrire dans un cercle de rayon R une corde telle, que la somme de sa longueur et de sa distance au centre soit égale à une longueur donnée l.

Géométrie. — Trouver à l'intérieur d'un tétraèdre ABCD un point M tel, qu'en le joignant aux quatre sommets A, B, C, D du tétraèdre, on obtienne quatre pyramides équivalentes.

Troisième.

1. Trouver tous les diviseurs communs à trois nombres entiers donnés. Former le tableau de ces diviseurs, en prenant pour les trois nombres :

12852, 14364, 21924.

2. La distance des centres de deux cercles égaux, de rayon R, est égale à $R\sqrt{3}$. On demande de calculer l'aire comprise entre les deux cercles. En supposant ensuite R égal à 1^{m}, on calculera la valeur numérique de l'aire précédente à 1^{cq} près.

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1883.

Mathématiques spéciales.

D'un point P, pris sur une normale en un point A d'un paraboloïde elliptique, on peut mener à la surface

quatre autres normales ayant pour pieds des points B, C, D, E :

1° Trouver l'équation de la sphère S passant par les quatre points B, C, D, E;

2° Trouver le lieu des centres I des sphères S quand le point P se déplace sur la normale au point A, ainsi que la surface engendrée par la droite PI.

Mathématiques élémentaires.

On donne deux droites R, R', non situées dans un même plan, un plan P parallèle à ces deux droites, et un point A.

On considère tous les cercles qui ont pour centre le milieu de la perpendiculaire commune aux deux droites R et R' et dont la circonférence rencontre chacune de ces droites R et R' :

1° Trouver le lieu de la projection du point A sur le plan de chacun de ces cercles;

2° Soient M et M' les points où la circonférence de l'un des cercles considérés rencontre la droite R et la droite R'; la sphère qui a ce cercle pour grand cercle et la sphère qui a MM' pour diamètre se coupent suivant ce cercle C; à ce cercle C on mène les tangentes MT, M'T' aux points M et M'; soit D la droite d'intersection des deux plans RMT, R'M'T'. On demande le lieu de la trace de cette droite D sur le plan P;

3° Trouver le lieu des extrémités du diamètre du cercle C perpendiculaire au diamètre MM' du même cercle;

4° Plus généralement, trouver le lieu des extrémités d'un diamètre du cercle C faisant avec le diamètre MM' du même cercle un angle constant donné.

Philosophie.

Étant donnés un triangle ABC et un nombre positif m plus petit que l'unité, on prend sur le côté AB un point C_1, tel que $AC_1 = mAB$; sur le côté BC un point A_1, tel que $BA_1 = mBC$; enfin sur le côté CA un point B_1, tel que $CB_1 = mCA$:

1° Trouver l'aire du triangle $A_1B_1C_1$;

2° On considère une suite indéfinie de triangles $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, ..., $A_pB_pC_p$, ... dont chacun se déduit du précédent comme le triangle $A_1B_1C_1$ se déduit du triangle ABC; trouver la limite de la somme des aires de ces triangles quand le nombre entier p augmente indéfiniment;

3° Étudier les variations de la limite précédente quand le nombre m varie entre 0 et 1;

4° Déterminer la position du point de rencontre des médianes des triangles $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, ..., $A_pB_pC_p$, ...

Seconde.

Algèbre. — On donne une pyramide régulière à base carrée SABCD, dont on suppose les faces latérales indéfiniment prolongées au delà du sommet S et au delà de la base ABCD. On coupe la pyramide par un plan parallèle à sa base et l'on construit un parallélépipède droit ayant pour base la section $abcd$ et pour hauteur la distance des deux plans parallèles $abcd$ et ABCD. A quelle distance faut-il mener le plan sécant pour que ce parallélépipède soit un cube?

Discussion du problème; nombre des solutions (on représentera par a le côté AB de la base de la pyramide donnée et par h la hauteur de cette pyramide).

Géométrie. — On donne deux droites A et B quelconques dans l'espace et un plan P perpendiculaire à la

droite A. Par cette droite A on mène un plan quelconque Q, et par la droite B un plan R perpendiculaire au plan Q; ces plans Q et R coupent le plan P suivant deux droites, qui se coupent elles-mêmes en un point M. Trouver le lieu que décrit le point M lorsque le plan Q tourne autour de la droite A.

Troisième.

1. On donne deux points fixes sur une circonférence et on les joint par deux cordes à un même point de la circonférence. Au milieu de l'une de ces cordes, on mène une droite qui coupe la seconde sous un angle donné (63° par exemple). On demande le lieu du point d'intersection lorsque le troisième point parcourt la circonférence.

Discuter le problème.

2. Faire voir que l'expression

$$\frac{1.2.3.4\ldots(2m-1)2m}{1.2.3\ldots m.2^{2m}}$$

est égale à

$$\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\,\frac{5}{2}\,\frac{7}{2}\cdots\frac{2m-1}{2}.$$

BIBLIOGRAPHIE.

Cours de Physique, à l'usage des élèves de la classe de Mathématiques spéciales; par M. *H. Pellat,* docteur ès sciences, professeur au lycée Louis-le-Grand. Paris, Paul Dupont; 1883. Grand in-8° de 830 pages. Prix : 14fr.

Cet Ouvrage, destiné principalement aux élèves de la classe de Mathématiques spéciales, peut être lu par les meilleurs

élèves de la classe de Mathématiques élémentaires, car il ne renferme presque rien qui soit hors de leur portée.

A part la haute Optique et l'étude des phénomènes capillaires, qui ne rentrent pas dans le programme des Mathématiques spéciales, il constitue un Cours de Physique complet.

S'il est un fait incontesté aujourd'hui, c'est l'immense progrès qui a été réalisé par l'introduction de la notion d'*énergie* dans l'étude des Sciences physiques et, dans des branches plus spéciales, par celle des notions de *potentiel*, de *ligne de force*, etc. Cependant, l'emploi de ces notions si précieuses s'est bien peu vulgarisé, et, si ces termes sont constamment employés maintenant dans le langage scientifique, ils ne le sont pas toujours avec une justesse suffisante : au sens précis on substitue souvent un sens vague. La raison de cette connaissance imparfaite est aisée à trouver : ces notions ont été présentées d'abord sous une forme exigeant, pour être bien comprises, des connaissances mathématiques, que ne possèdent pas toutes les personnes qui s'intéressent aux sciences; par cette même raison, elles ont été presque complètement écartées jusqu'ici des programmes de l'instruction secondaire, et ne sont pas devenues classiques.

Et pourtant, comment un physicien peut-il faire son cours aujourd'hui sans parler de la loi de la conservation de l'énergie, qui est la base de la Physique moderne, comme la loi de la conservation de la matière est la base de la Chimie depuis Lavoisier?

Comment peut-on traiter des phénomènes électriques sans parler du potentiel, la seule quantité qu'on puisse aisément mesurer en électricité statique, et dont la connaissance est presque toujours indispensable pour déterminer les autres grandeurs?

Un des principaux buts, que nous nous sommes proposé, en écrivant cet Ouvrage, est précisément d'introduire ces notions fondamentales dans l'enseignement de nos lycées, étant convaincu qu'il n'y a pas de plus puissant moyen de vulgarisation. Avec très peu de calcul (ces calculs du reste étant toujours faciles à suivre, même pour un élève de la classe de Mathématiques élémentaires), et sans rien ôter de leur précision, nous avons présenté ces mêmes notions. Nous les avons étroitement reliées à l'expérience. Enfin nous avons montré, par des exemples, l'emploi utile qu'on pouvait en faire, et comme elles viennent guider le physicien expérimentateur dans ses recherches.

D'ailleurs, nous nous sommes toujours appliqué à faire comprendre que nos connaissances en Physique proviennent de l'observation des phénomènes naturels et de l'expérience, et nous avons donné la plus large part à la description des meilleures méthodes expérimentales. En cela nous croyons nous être conformés à l'esprit du nouveau programme, que nous avons pris à peu près pour plan général de l'Ouvrage. Si nous avons traité quelques questions qui n'y sont pas spécialement désignées, pour rendre le cours un peu plus complet, il va sans dire qu'aucune de celles qui y sont mentionnées n'a été omise.

Tout récemment, les physiciens des diverses parties du monde ont adopté, au Congrès international des Électriciens (octobre 1881), un système d'unités absolues qui, quoique visant plus spécialement les mesures électriques, s'étend en réalité à toutes les mesures faites en Physique.

Nous croyons qu'il est du devoir de tout professeur d'enseigner dorénavant, et de faire employer aux élèves, ce nouveau système de mesure qui, du reste, ayant pour base le système métrique, ne change que fort peu de chose aux habitudes prises antérieurement, d'autant plus que dans aucun cas il ne saurait y avoir confusion. Aussi avons-nous exposé dans cet Ouvrage les principes sur lesquels repose tout système de mesures absolues, et le système particulier adopté par le Congrès. Nous en avons fait usage dans les diverses parties de la Physique, sauf à indiquer parallèlement, quand nous l'avons cru utile, pour faciliter la transition, les formules ou les résultats numériques avec les unités consacrées par l'usage, dans les cas relativement rares où il n'y a pas concordance.

Par là, surtout, nous espérons que cet Ouvrage pourra rendre quelques services en dehors de l'enseignement et de la classe de Mathématiques spéciales, auquel il est plus particulièrement destiné.

H. PELLAT.

LEÇONS DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE, à l'usage des élèves de la classe de Mathématiques spéciales, par M. *E. Pruvost,* inspecteur général de l'Instruction publique, ancien professeur au lycée Louis-le-Grand. Paris, Paul Dupont; 1884. Grand in-8° de 352 pages. Prix : 7fr.

Le premier fascicule annoncé ici renferme la construction

des formules, les coordonnées et leur transformation, la ligne droite, le cercle, les lieux géométriques, la classification des courbes du second ordre par la méthode de Descartes et par son équivalente, la décomposition en carrés, les centres, les diamètres et les axes des courbes du second ordre, la réduction de l'équation du second degré dans le cas des axes rectangulaires, les invariants, les tangentes, les courbes enveloppes, la concavité et la convexité, les points d'inflexion, les points singuliers, l'étude d'une courbe algébrique au voisinage d'un de ses points, les asymptotes, l'étude des points à l'infini, la construction des courbes en coordonnées rectilignes et le commencement de l'étude des courbes du second degré sur les équations réduites.

Le deuxième fascicule est sous presse.

Cours de Mathématiques spéciales : 2e Partie, Géométrie analytique a deux dimensions; par M. *G. de Longchamps,* professeur de Mathématiques spéciales au lycée Charlemagne. Paris, Delagrave; 1884. In-8° de 248 pages. Prix : 5fr.

Le premier fascicule annoncé ici renferme les coordonnées, l'étude sommaire de quelques courbes célèbres, la construction des expressions homogènes, la transformation de coordonnées, la ligne droite, le cercle, les tangentes, les enveloppes, les polaires, les polaires réciproques, les asymptotes, les points singuliers, les centres, les diamètres, les axes, les courbes diamétrales, l'homothétie et la similitude.

Le second fascicule paraîtra dans la première quinzaine de mai, et coûtera 5fr.

ERRATA DES TABLES DE LOGARITHMES DE SCHRÖN.

Page 281, 1re colonne, 1re ligne, insérer le nombre **50**.



SUR LA TRANSFORMATION DES ÉQUATIONS;

PAR M. CH. BIEHLER.

1. Étant donnée une équation algébrique et entière de degré m, $f(x) = 0$, dont les racines sont $a, b, c, \ldots, l$, on se propose de trouver une équation

$$F(y) = 0$$

dont les racines soient des fonctions rationnelles des racines de la proposée.

Supposons d'abord que les racines de l'équation en y soient fonction de deux des racines de l'équation en x

$$y = \varphi(a, b).$$

L'équation transformée

$$F(y) = 0$$

s'obtiendra en égalant à zéro le produit

$$\begin{aligned} F(y) = \; & [y - \varphi(a, a)][y - \varphi(a, b)]\ldots[y - \varphi(a, l)] \\ & \times [y - \varphi(b, a)][y - \varphi(b, b)]\ldots[y - \varphi(b, l)] \\ & \times \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \times [y - \varphi(l, a)][y - \varphi(l, b)]\ldots[y - \varphi(l, l)]. \end{aligned}$$

Je dis que l'on peut former l'équation en y au moyen d'éliminations successives d'un seul paramètre entre deux équations.

En effet, si l'on désigne par $\Phi(a, y)$ l'éliminant des deux équations

$$y - \varphi(a, x) = 0, \quad f(x) = 0,$$

on voit que le produit des m facteurs de la première ligne de $F(y)$, savoir :

$$[y - \varphi(a, a)][y - \varphi(a, b)]\ldots[y - \varphi(a, l)],$$

n'est autre chose que $\Phi(a, y)$ à une certaine puissance près du coefficient de x^m dans $f(x)$; par suite, le polynôme $F(y)$ lui-même est le produit

$$F(y) = \Phi(a, y)\Phi(b, y)\ldots\Phi(l, y);$$

$F(y)$ est donc l'éliminant des deux équations

$$\Phi(x, y) = 0, \quad f(x) = 0.$$

On voit donc que, pour former l'équation en y cherchée, l'opération que l'on appelle communément éliminer a et b entre les trois équations

$$y = \varphi(a, b),$$
$$f(a) = 0, \quad f(b) = 0,$$

revient à éliminer b entre les équations

$$y = \varphi(a, b), \quad f(b) = 0,$$

ce qui donne une équation

$$\Phi(a, y) = 0,$$

puis à éliminer a entre

$$\Phi(a, y) = 0, \quad f(a) = 0.$$

Le problème revient donc à deux éliminations ordinaires d'un paramètre entre deux équations.

2. On voit, d'après la composition du polynôme $F(y)$, que l'équation

$$F(y) = 0$$

est du degré m^2; mais, parmi les m^2 racines de cette équation, se trouvent les quantités

$$\varphi(a, a), \ \varphi(b, b), \ \ldots, \ \varphi(l, l).$$

Si l'on veut former l'équation de degré $m(m-1)$ qui n'admet pour racines que les quantités $\varphi(a, b)$, dans lesquelles a et b sont des racines différentes, il suffira de

remarquer que le polynôme $\Phi(a, y)$ est divisible par $y - \varphi(a, a)$; le quotient de $\Phi(a, y)$ par $y - \varphi(a, a)$ est un polynôme de degré $m - 1$ en y, $\Phi_1(a, y)$, et le résultat de l'élimination de a entre

$$\Phi_1(a, y) = 0, \quad f(a) = 0$$

donne l'équation

$$F_1(y) = 0$$

de degré $m(m-1)$ cherchée.

On peut aussi dans le même but diviser $F(y)$ par le polynôme de degré m

$$\psi(y) = [y - \varphi(a, a)][y - \varphi(b, b)]\ldots[y - \varphi(l, l)],$$

que l'on obtient en fonction rationnelle des coefficients de $f(x)$ en éliminant a entre les équations

$$y - \varphi(a, a) = 0, \quad f(a) = 0.$$

Si la fonction $\varphi(a, b)$ est symétrique en a et b, le polynôme

$$F_1(y) = \frac{F(y)}{\psi(y)}$$

est le carré d'un polynôme entier en y, à cause de la présence simultanée des facteurs

$$y - \varphi(a, b), \quad y - \varphi(b, a)$$

dans $F(y)$. L'équation cherchée ne sera donc plus que du degré $\frac{m(m-1)}{2}$.

Ces considérations s'appliquent à la formation des équations aux sommes, aux différences, aux produits, aux quotients deux à deux des racines d'une équation donnée, ainsi qu'à l'équation aux carrés des différences; il suffit de prendre, pour la fonction $\varphi(a, b)$, l'une

des quatre fonctions

$$y = a + b, \quad y = a - b,$$

$$y = ab, \quad y = \frac{a}{b}.$$

3. Considérons maintenant le cas où l'on aurait à former une équation dont les racines soient une fonction de trois racines de l'équation proposée

$$y = \varphi(a, b, c).$$

D'après ce que nous venons de démontrer, le produit $\Psi(a, y)$,

$$\begin{aligned}\Psi(a, y) = {} & [y - \varphi(a, a, a)][y - \varphi(a, a, b)]\ldots[y - \varphi(a, a, l)] \\ & \times [y - \varphi(a, b, a)][y - \varphi(a, b, b)]\ldots[y - \varphi(a, b, l)] \\ & \times \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \times [y - \varphi(a, l, a)][y - \varphi(a, l, b)]\ldots[y - \varphi(a, l, l)],\end{aligned}$$

s'obtient en éliminant c entre les équations

$$y - \varphi(a, b, c) = 0, \quad f(c) = 0,$$

ce qui donne une équation

$$\Phi(a, b, y) = 0;$$

puis en éliminant b entre

$$\Phi(a, b, y) = 0, \quad f(b) = 0.$$

L'équation en y cherchée

$$F(y) = 0$$

s'obtient évidemment en égalant à zéro le produit

$$F(y) = \Psi(a, y)\,\Psi(b, y)\ldots\Psi(l, y);$$

ce produit s'obtient en fonction rationnelle des coefficients de $f(x)$, en éliminant a entre les équations

$$\Psi(a, y) = 0, \quad f(a) = 0.$$

Le problème est donc ramené à trois éliminations successives et ordinaires d'un paramètre entre deux équations.

Il est aisé de voir que la méthode précédente est générale et que le problème de la transformation est ramené de cette manière à l'élimination.

Remarque. — Pour que la méthode des éliminations successives puisse s'employer, il n'est pas nécessaire que $a, b, c, \ldots$ soient racines d'une même équation. Ainsi, dans le cas où l'on aurait à éliminer $a, b, c, \ldots$ entre les équations

$$\begin{gathered} f_1(a) = 0, \\ f_2(b) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots, \\ f_n(k) = 0, \\ \varphi(a, b, \ldots, k) = 0, \end{gathered}$$

on pourrait éliminer a entre

$$\varphi(a, b, \ldots, k) = 0, \quad f_1(a) = 0,$$

puis b entre l'équation résultant de cette élimination et $f(b) = 0$, etc.

La démonstration de cette proposition est analogue à celle que nous avons donnée pour la formation de l'équation transformée.

4. A cette question de la transformation des équations se rattache la suivante :

Trouver la condition nécessaire et suffisante pour que n des m racines d'une équation soient liées par une relation

$$\varphi(a, b, \ldots, j) = 0.$$

La condition énoncée s'obtient évidemment en ex-pri-

mant que l'équation en y dont les racines sont

$$y = \varphi(a, b, \ldots, j)$$

a une racine nulle, c'est-à-dire en égalant à zéro le terme indépendant de y dans l'équation $F(y) = 0$.

Mais il est aisé de traiter directement le problème par une méthode toute semblable à la précédente.

Considérons le cas d'une relation

$$\varphi(a, b) = 0$$

entre deux racines. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une telle relation entre deux racines de l'équation $f(x) = 0$ est évidemment

$$\begin{array}{l} \varphi(a, a)\,\varphi(a, b)\ldots\varphi(a, l) \\ \times\,\varphi(b, a)\,\varphi(b, b)\ldots\varphi(b, l) \\ \times\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \times\,\varphi(l, a)\,\varphi(l, b)\ldots\varphi(l, l) = 0. \end{array}$$

Soit V ce produit. Pour former V en fonction des coefficients de $f(x)$, remarquons que le produit des m facteurs de la première ligne s'obtient en cherchant l'éliminant des deux équations

$$\varphi(a, x) = 0, \quad f(x) = 0.$$

Soit $\Phi(a)$ cet éliminant ; V sera donc égal au produit

$$V = \Phi(a)\,\Phi(b)\ldots\Phi(l),$$

et il s'obtient par suite, en éliminant x entre les équations

$$\Phi(x) = 0, \quad f(x) = 0.$$

En résumé, la condition $V = 0$ s'obtient donc en éliminant b entre les équations

$$\varphi(a, b) = 0, \quad f(b) = 0,$$

ce qui donne

$$\Phi(a) = 0.$$

puis en éliminant a entre

$$\Phi(a) = 0, \quad f(a) = 0.$$

Il est facile de voir que la condition analogue, pour le cas où la relation $\varphi = 0$ renfermerait plus de deux racines, s'obtient encore par des éliminations successives d'un paramètre entre deux équations.

Dans le cas de deux racines ou dans les cas plus complexes, on peut supposer que les racines a et b, qui figurent dans φ, ne sont pas les mêmes; pour avoir la condition cherchée en faisant cette restriction, il suffit de diviser $\Phi(a)$ par $\varphi(a, a)$ et d'éliminer a entre

$$\frac{\Phi(a)}{\varphi(a, a)} = 0 \quad \text{et} \quad f(a) = 0,$$

ou bien de diviser V par le produit

$$U = \varphi(a, a)\,\varphi(b, b)\ldots\varphi(l, l),$$

qui est une fonction des coefficients aisée à obtenir.

5. Dans le cas où la relation $V = 0$ est satisfaite, on peut se proposer de trouver les racines a et b satisfaisant à la relation $\varphi(a, b) = 0$ et, par suite, de ramener la résolution de l'équation $f(x) = 0$ à celle d'équations de degré moindre.

Supposons donc que la relation $V = 0$ soit satisfaite, ou plutôt supposons que l'on sache qu'il existe une relation

$$\varphi(a, b) = 0$$

entre deux racines de l'équation $f(x) = 0$.

Le nombre des racines de l'équation $f(x) = 0$ susceptibles de satisfaire à la relation

$$\varphi(a, b) = 0,$$

en occupant la place de a, est évidemment égal au

nombre des facteurs $\Phi(a)$, $\Phi(b)$, ..., $\Phi(l)$ qui sont nuls; l'équation qui donne ces racines se formera en égalant à zéro le plus grand commun diviseur des polynômes $\Phi(x)$ et $f(x)$; soit $\Delta(x)$ ce plus grand commun diviseur. A chaque racine de l'équation $\Delta(x) = 0$ sont adjointes un certain nombre de racines de $f(x) = 0$ qui occuperont la place de b dans $\varphi(a, b)$.

Supposons que l'équation $\Delta(x) = 0$ soit de degré p et soient $a, b, \ldots, d$ les racines de cette équation; considérons la quantité

$$\begin{aligned} V_1 = \; & \varphi(a, a)\,\varphi(a, b)\ldots\varphi(a, l) \\ \times\, & \varphi(b, a)\,\varphi(b, b)\ldots\varphi(b, l) \\ \times\, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \times\, & \varphi(d, a)\,\varphi(d, b)\ldots\varphi(d, l). \end{aligned}$$

Le produit V_1 est formé par tous les facteurs $\varphi(a, b)$ qui peuvent s'annuler. Or le produit des facteurs de la première colonne est l'éliminant des deux équations

$$\varphi(x, a) = 0, \quad \Delta(x) = 0.$$

Soit $\psi(a)$ cet éliminant, la fonction V_1 est égale à

$$\psi(a) \times \psi(b) \times \ldots \times \psi(l);$$

les racines susceptibles d'occuper la place de b dans la relation $\varphi(a, b) = 0$ sont donc celles qui annulent l'un des facteurs

$$\psi(a), \; \psi(b), \; \ldots, \; \psi(l).$$

On les obtiendra par conséquent en égalant à zéro le plus grand commun diviseur des deux fonctions $\psi(x)$ et $f(x)$: soit $\Delta_1(x)$ ce plus grand commun diviseur; l'équation $\Delta_1(x) = 0$ donne toutes les racines qui peuvent occuper la place de b.

Si, au lieu de chercher le plus grand commun diviseur entre $\psi(x$ et $f(x)$, on avait cherché le plus grand

commun diviseur entre $\psi(x)$ et $\frac{f(x)}{\Delta(x)}$, on aurait exclu par là les racines de l'équation $\Delta(x) = 0$ qui peuvent occuper la place de b; on aurait donc, par le fait, restreint la généralité du problème.

Si les deux polynômes $\Delta(x)$ et $\Delta_1(x)$ ne sont pas premiers entre eux, il y a des racines qui peuvent occuper la place de a et celle de b dans la relation

$$\varphi(a, b) = 0;$$

ce sont les racines communes aux deux équations

$$\Delta(x) = 0, \quad \Delta_1(x) = 0.$$

On voit aussi comment la résolution de l'équation $f(x) = 0$ est ramenée à celle d'équations de degré moindre.

6. Supposons maintenant le cas où l'on a une relation

$$\varphi(a, b, c) = 0$$

entre trois racines de l'équation $f(x) = 0$.

D'après ce que nous avons dit précédemment, on voit aisément que, si l'on élimine c entre

$$\varphi(a, b, c) = 0, \quad f(c) = 0,$$

et si l'on désigne par

$$\Phi(a, b) = 0$$

le résultat de l'élimination; puis, si l'on élimine b entre

$$\Phi(a, b) = 0, \quad f(b) = 0,$$

et qu'on appelle $\psi(a) = 0$ l'équation obtenue, les racines a sont données en égalant à zéro le plus grand commun diviseur $\Delta(x)$ des deux polynômes $\psi(x)$ et $f(x)$. Cela fait, si l'on élimine a entre les deux équations

$$\varphi(a, b, c) = 0, \quad \Delta(a) = 0,$$

on obtient une relation

$$F(b, c) = 0,$$

à laquelle satisfont les racines b, c; on adjoint à cette relation les deux conditions

$$f(b) = 0, \quad f(c) = 0,$$

et le problème est ramené au précédent. On restreindrait encore la généralité de la question en adjoignant à la relation

$$F(b, c) = 0$$

les conditions

$$f_1(b) = 0, \quad f_1(c) = 0,$$

$f_1(x)$ désignant le quotient de $f(x)$ par $\Delta(x)$.

SUR LE CALCUL DES FONCTIONS SYMÉTRIQUES DES RACINES D'UNE ÉQUATION;

PAR M. CH. BIEHLER.

1. Pour ramener le calcul des fonctions symétriques rationnelles des racines d'une équation à celui des sommes des puissances semblables de ces racines, on fait usage des propositions suivantes :

1° Toute fonction symétrique rationnelle d'un certain nombre de lettres est le quotient de deux fonctions symétriques entières des mêmes lettres;

2° Toute fonction symétrique entière d'un certain nombre de lettres est une somme de fonctions symétriques homogènes des mêmes lettres;

3° Toute fonction symétrique entière et homogène d'un certain nombre de lettres est composée linéairement de fonctions symétriques de la forme $\Sigma a^\alpha b^\beta \ldots l^\lambda$,

où les exposants α, β, ..., λ sont des nombres déterminés, les mêmes pour la même fonction;

4° Enfin, toute fonction symétrique de la forme $\Sigma a^\alpha b^\beta \ldots l^\lambda$, où α, β, ..., λ sont des nombres déterminés, est une fonction rationnelle et entière des sommes des puissances semblables des racines.

Nous allons, dans ce qui suit, donner une démonstration des premières de ces propositions.

2. Considérons le cas d'une fonction symétrique rationnelle de deux lettres,

$$\frac{f(a, b)}{F(a, b)}.$$

Nous allons démontrer que, si l'on a, quels que soient a et b,

$$\frac{f(a, b)}{F(a, b)} = \frac{f(b, a)}{F(b, a)},$$

on aura séparément

$$f(a, b) = f(b, a),$$
$$F(a, b) = F(b, a).$$

Nous nous appuierons pour cela sur la proposition suivante, bien connue : Si la fraction irréductible $\frac{f(x)}{F(x)}$ est égale, quel que soit x, à une fraction $\frac{f_1(x)}{F_1(x)}$, les deux fonctions $f_1(x)$ et $F_1(x)$ sont égales respectivement à $f(x)$ et $F(x)$ multipliées par un même polynôme entier.

Soit b_0 une valeur de b, telle que $f(a, b_0)$ et $F(a, b_0)$ ne puissent s'annuler simultanément pour aucune valeur de a; c'est-à-dire, supposons que b_0 ne soit pas l'une des valeurs de b faisant partie du système des so-

lutions communes aux deux équations

$$f(a, b) = 0,$$
$$F(a, b) = 0.$$

On aura

$$\frac{f(a, b_0)}{F(a, b_0)} = \frac{f(b_0, a)}{F(b_0, a)};$$

$\frac{f(a, b_0)}{F(a, b_0)}$ est une fraction irréductible en a; car nous supposons $\frac{f(a, b)}{F(a, b)}$ débarrassée de tout facteur en a ou b commun au numérateur et au dénominateur, et la valeur b_0 ne donne pas, dans l'hypothèse faite, de facteur commun à $f(a, b_0)$ et à $F(a, b_0)$; par suite, $f(b_0, a)$, $F(b_0, a)$ sont respectivement d'un degré en a au moins égal à celui de $f(a, b_0)$ et de $F(a, b_0)$: on pourra donc, en appliquant le théorème précédent, écrire les égalités

$$f(b_0, a) = f(a, b_0)\,\Theta_0(a, b_0),$$
$$F(b_0, a) = F(a, b_0)\,\Theta_0(a, b_0),$$

$\Theta_0(a, b_0)$ étant un polynôme entier en a dont les coefficients sont rationnels en b_0.

Divisons maintenant $f(b, a)$ par $f(a, b)$, en ordonnant les polynômes par rapport aux puissances de a, nous aurons

$$f(b, a) = f(a, b)\,\Theta(a, b) + R(a, b).$$

Si $f(a, b)$ est de degré m en a, $R(a, b)$ sera au plus du degré $m - 1$ en a, et les coefficients des diverses puissances de a dans $R(a, b)$ sont des fonctions rationnelles de b.

Si, dans cette égalité, on fait $b = b_0$, il viendra

$$f(b_0, a) = f(a, b_0)\,\Theta(a, b_0) + R(a, b_0).$$

Mais l'égalité

$$f(b_0, a) = f(a, b_0)\,\Theta_0(a, b_0)$$

nous montre que les m valeurs de a qui annulent $f(a, b_0)$ annulent aussi $f(b_0, a)$, ces valeurs annulent par suite $R(a, b_0)$.

Or $R(a, b_0)$ n'est que de degré $m - 1$ en a au plus,

$$R(a, b_0) = r_1(b_0)a^{m-1} + r_2(b_0)a^{m-2} + \ldots + r_{m-1}(b_0);$$

par suite, $R(a, b_0)$ est identiquement nul, et l'on a

$$r_1(b_0) = 0, \quad r_2(b_0) = 0, \quad r_{m-1}(b_0) = 0.$$

Ces égalités ont lieu pour une infinité de valeurs de b_0; comme elles sont algébriques en b_0, les fonctions r_1, $r_2, \ldots, r_{m-1}$ sont identiquement nulles, par conséquent $R(a, b)$ est identiquement nul et l'on aura, quels que soient a, b,

$$f(b, a) = f(a, b)\,\Theta(a, b),$$

d'où

$$F(b, a) = F(a, b)\,\Theta(a, b).$$

La fonction $\Theta(a, b)$, que nous savons entière en a, est aussi entière en b; car, étant rationnelle en b, on pourrait la mettre sous la forme

$$\Theta(a, b) = \frac{\Theta_1(a, b)}{\varphi(b)},$$

$\varphi(b)$ étant un polynôme en b, tel qu'aucun coefficient de $\Theta_1(a, b)$ ne soit divisible par un facteur de $\varphi(b)$.

Les égalités ci-dessus deviendraient

$$f(b, a) \times \varphi(b) = f(a, b)\,\Theta_1(a, b),$$
$$F(b, a) \times \varphi(b) = F(a, b)\,\Theta_1(a, b);$$

par suite,

$$f(a, b) \quad \text{et} \quad F(a, b)$$

devraient être divisibles par $\varphi(b)$, ce que nous n'avons pas admis.

Si, dans les deux égalités

$$f(b, a) = f(a, b)\,\Theta(a, b),$$
$$F(b, a) = F(a, b)\,\Theta(a, b),$$

on change a en b et b en a, on obtient les suivantes :

$$f(a, b) = f(b, a)\,\Theta(b, a),$$
$$F(a, b) = F(b, a)\,\Theta(b, a),$$

qui nous donnent, en les combinant avec les premières,

$$\Theta(a, b)\,\Theta(b, a) = 1.$$

Comme $\Theta(a, b)$ est une fonction entière de a et de b, il en sera de même de $\Theta(b, a)$, par suite $\Theta(a, b)$ est indépendant de a et b, et les deux fonctions Θ sont égales. Leur produit étant égal à 1, elles ne peuvent être égales qu'à -1 ou à $+1$.

Or on ne peut pas avoir $\Theta(a, b) = -1$, car les égalités

$$f(a, b) = -f(b, a),$$
$$F(a, b) = -F(b, a)$$

donneraient, pour $b = a$,

$$f(a, a) = -f(a, a),$$
$$F(a, a) = -F(a, a);$$

par suite,

$$f(a, a) = 0, \quad F(a, a) = 0.$$

Les deux fonctions f et F admettraient le facteur $a - b$ simultanément, ce qui est contraire à l'hypothèse faite; par conséquent,

$$f(a, b) = f(b, a),$$
$$F(a, b) = F(b, a),$$

et les fonctions $f(a, b)$ et $F(a, b)$ sont symétriques en a et b. La démonstration que nous venons de faire s'applique au cas d'une fonction symétrique rationnelle d'un nombre quelconque de lettres, comme il est aisé de le voir; nous pouvons donc regarder la proposition comme établie d'une manière générale.

3. La seconde proposition peut se démontrer facile-

ment de la manière suivante. Soit $f(a, b, c, \ldots, l)$ la fonction symétrique entière considérée et soit, d'une manière générale, $f_\mu(a, b, c, \ldots, l)$ l'ensemble homogène des termes du degré μ de la fonction proposée.

On aura

$$\begin{aligned} & f(a, b, c, \ldots, l) \\ & \quad = f_m(a, b, c, \ldots, l) + f_{m-1}(a, b, c, \ldots, l) + \ldots \\ & \qquad + f_1(a, b, \ldots, l) + f_0. \end{aligned}$$

Si l'on permute deux lettres quelconques a et b, on aura

$$f(a, b, c, \ldots, l) = f(b, a, c, \ldots, l);$$

et par suite aussi

$$f(\lambda a, \lambda b, \lambda c, \ldots, \lambda l) = f(\lambda b, \lambda a, \lambda c, \ldots, \lambda l),$$

on a donc les deux égalités

$$\begin{aligned} & f(\lambda a, \lambda b, \lambda c, \ldots, \lambda l) \\ & \quad = \lambda^m f_m(a, b, c, \ldots, l) + \lambda^{m-1} f(a, b, c, \ldots, l) + \ldots \\ & \qquad + \lambda f_1(a, b, c, \ldots, l) + f_0, \\ & f(\lambda b, \lambda a, \lambda c, \ldots, \lambda l) \\ & \quad = \lambda^m f_m(b, a, c, \ldots, l) + \lambda^{m-1} f(b, a, c, \ldots, l) + \ldots \\ & \qquad + \lambda f_1(b, a, c, \ldots, l) + f_0. \end{aligned}$$

En les retranchant membre à membre, on a, quel que soit λ,

$$\begin{aligned} & \lambda^m[f_m(a, b, c, \ldots, l) - f_m(b, a, c, \ldots, l)] \\ & \quad + \lambda^{m-1}[f_{m-1}(a, b, c, \ldots, l) - f_{m-1}(b, a, c, \ldots, l)] \\ & \quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \quad + \lambda[f_1(a, b, c, \ldots, l) - f_1(b, a, c, \ldots, l)] = 0. \end{aligned}$$

Les coefficients de toutes les puissances de λ doivent donc être nuls, pour tout système de valeurs des lettres $a, b, c, \ldots, l$.

On devra donc avoir

$$f_m(a, b, c, \ldots, l) = f_m(b, a, c, \ldots, l),$$
$$f_{m-1}(a, b, c, \ldots, l) = f_{m-1}(b, a, c, \ldots, l),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$f_1(a, b, c, \ldots, l) = f_1(b, a, c, \ldots, l),$$

c'est-à-dire que toutes les fonctions

$$f_\mu(a, b, c, \ldots, l)$$

sont symétriques par rapport aux lettres qui y entrent.

4. Pour démontrer la troisième proposition, il suffit de considérer un terme quelconque $Aa^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots l^\lambda$ de la fonction symétrique homogène $f_\mu(a, b, c, \ldots, l)$. Si l'on change a en b et b en a, la fonction f_μ ne change pas, mais le terme considéré devient

$$Ab^\alpha a^\beta c^\gamma \ldots l^\lambda;$$

il se trouvait donc primitivement dans la fonction

$$f_\mu(a, b, c, \ldots, l).$$

On montre de même que tous les termes de la fonction symétrique

$$\Sigma a^\alpha b^\beta \ldots l^\lambda,$$

où α, β, ..., λ ont les valeurs précédentes, s'y trouvent; et de plus ils sont tous multipliés par le même coefficient A; par suite $f_\mu(a, b, c, \ldots, l)$ est une somme de fonctions symétriques de la même forme,

$$f_\mu(a, b, c, \ldots, l) = \Sigma(A\,\Sigma a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots l^\lambda).$$

RÉSOLUTION COMPLÈTE, EN NOMBRES ENTIERS, DE L'ÉQUATION GÉNÉRALE DU SECOND DEGRÉ, HOMOGÈNE ET CONTENANT UN NOMBRE QUELCONQUE D'INCONNUES;

Par M. DESBOVES.

Nota. — Dans tout ce qui va suivre, nous désignerons par $(x, y, z, u, \ldots)$ une solution, en nombres entiers, de l'équation proposée, et si $x, y, z, u, \ldots$ n'ont aucun facteur commun, m étant un nombre entier quelconque, positif, négatif ou nul, $(mx, my, mz, mu, \ldots)$ sera considérée comme une solution identique à la première.

1. Je vais d'abord traiter le cas de l'équation homogène du second degré, à trois inconnues, sous sa forme générale

$$(1) \qquad aX^2 + bY^2 + cZ^2 + dXY + eXZ + fYZ = 0.$$

Admettons que cette équation puisse être résolue en nombres entiers, et soit (x, y, z) une solution connue; ρ, p et q étant trois variables auxiliaires, posons

$$(2) \qquad X = \rho x, \quad Y = \rho y + p, \quad Z = \rho z + q.$$

En remplaçant dans l'équation (1) X, Y, Z par les expressions précédentes, on a

$$[(dp + eq)x + (2bp + fq)y + (2cq + fp)z]\rho$$
$$bp^2 + cq^2 + fpq = 0,$$

d'où l'on tire

$$\rho = -\frac{bp^2 + cq^2 + fpq}{(dp + eq)x + (2bp + fq)y + (2cq + fp)z};$$

et, en substituant cette valeur de ρ dans les formules (2),

on a

$$(3)\quad \begin{cases} X = -(bp^2 + cq^2 + fpq)x, \\ Y = (dx + by + fz)p^2 - cyq^2 + (ex + 2cz)pq, \\ Z = -bzp^2 + (ex + fy + cz)q^2 + (dx + 2by)pq. \end{cases}$$

Remarque. — Si l'on avait posé $X = \rho x + r$, comme il semblait naturel de le faire, on n'aurait pas obtenu de formules plus générales. En effet, si l'on écrit

$$\rho x + r = \rho', \quad \text{d'où} \quad \rho = \rho' - \frac{r}{x},$$

il viendra

$$X = \rho' x, \quad Y = \rho' y + p - \frac{ry}{x}, \quad Z = \rho' z + q - \frac{rz}{x},$$

et ces formules ne diffèrent pas des formules (2) si l'on y considère ρ', $p - \frac{ry}{x}$, $q - \frac{rz}{x}$ comme les variables substituées respectivement à ρ, p, q.

2. Comme on n'a fait aucune hypothèse particulière sur les variables ρ, p, q, il est clair que les formules (3) donnent la solution générale de l'équation (1). On peut d'ailleurs le vérifier *a posteriori* en faisant voir qu'on peut toujours déterminer des valeurs de p et q d'où l'on déduira, à l'aide des formules (3), une solution donnée (X, Y, Z).

En effet, la division, membre à membre, des deux premières équations (3) donne

$$c(xY - yX)q^2 + [(ex + 2cz)X + fxY]pq + [(dx + by + fz)X + bxY]p^2 = 0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{q}{p} = \frac{\left\{ \begin{array}{l} -[(ex + 2cz)X + fxY] \\ \pm x\sqrt{(e^2 - 4ac)X^2 + 2(ef - 2cd)XY + (f^2 - 4bc)Y^2} \end{array} \right\}}{2c(xY - yX)}.$$

Or, si l'on ajoute le produit par $4c$ du premier membre

de l'équation (1) qui est nul à la quantité sous le radical, cette quantité devient le carré de $eX + fY + 2cZ$, et l'on a :

$$(4) \quad \frac{q}{p} = \frac{-[(ex + 2cz)X + fxY] \pm x(eX + fY + 2cZ)}{2c(xY - yX)}.$$

Donc, suivant que l'on prendra le signe + ou le signe — devant le second terme du numérateur, on aura l'un ou l'autre système,

$$(5) \qquad p = xY - yX, \quad q = xZ - zX;$$

$$(6) \quad q = (ex + cz)X + fxY + cxZ, \quad p = c(yX - xY).$$

Mais, pour que l'un ou l'autre système puisse être admis, il faut que les valeurs de p et de q que l'on en tire soient d'accord avec les valeurs déduites de l'équation obtenue en divisant, membre à membre, la première et la dernière équation du système (3). L'équation ainsi formée est la suivante :

$$b(xZ - zX)p^2 + [(dx + 2by)X + fxZ]pq + [(ex + fy + cz)X + cxZ]q^2 = 0,$$

d'où l'on tire, par un calcul analogue à celui qui a donné la formule (4),

$$\frac{p}{q} = \frac{-[(dx + 2by)X + fxZ] \pm x(dX + 2bY + fZ)}{2b(xZ - zX)},$$

et, suivant que l'on prendra le signe + ou le signe — devant le second terme du numérateur, on aura

$$(7) \qquad p = xY - yX, \quad q = xZ - zX;$$

$$(8) \quad p = (dx + by)X + bxY + fxZ, \quad q = b(zX - xZ).$$

Les formules (5) et (7) étant identiques, on voit qu'on pourra déterminer p et q par les formules (5). On s'assure, du reste, qu'en combinant autrement l'une des formules (5) et (6) avec l'une des formules (7) et (8) on tombe sur une impossibilité.

On vérifie aisément que les formules (5) satisfont à la question ; car, si l'on remplace dans les formules (3) p et q par les valeurs que donnent les formules (5), les seconds membres des formules (3) deviennent égaux respectivement à X, Y, Z multipliés par

$$x^2[(2ax + dy + ez)X \\ + (dx + 2by + fz)Y + (ex + fy + 2cz)Z].$$

Remarque. — Lorsque la solution que l'on veut reproduire est la solution connue elle-même (x, y, z), si l'on représente par F le premier membre de l'équation (1) dans lequel on remplace X, Y, Z par x, y, z, le second facteur de l'expression précédente devient

$$\frac{dF}{dx}x + \frac{dF}{dy}y + \frac{dF}{dz}z,$$

c'est-à-dire, d'après le théorème des fonctions homogènes, 2F ou zéro; mais alors les seconds membres des équations (3) doivent encore être considérés comme donnant la solution (x, y, z).

3. Faisons une application des formules (3) à l'équation

$$(9) \qquad 15X^2 - 7Y^2 = 23Z^2.$$

Gauss (¹), qui s'est occupé de la résolution de cette équation, obtient, par les méthodes qui lui sont propres, les deux solutions (3, 4, 1), (9, 11, 4). Servons-nous de la première pour obtenir les formules qui correspondent à l'équation (9). Il suffit pour cela de faire dans les formules (3) $a = 15$, $b = -7$, $c = -23$, $d = 0$, $e = 0$, $f = 0$, $x = 3$, $y = 4$, $z = 1$. On a alors les formules

(¹) *Disquisitiones arithmeticæ*, p. 357.

demandées

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} \pm X &= 3(7p^2 + 23q^2),\\ \pm Y &= -28p^2 + 92q^2 - 46pq,\\ \pm Z &= 7p^2 - 23q^2 - 56pq.\end{aligned}\right.$$

Si l'on veut ensuite obtenir les valeurs de p et q auxquelles correspondent respectivement pour X, Y, Z les valeurs 9, 11, 4, on remplacera dans les formules (5) x, y, z, X, Y, Z respectivement par 3, 4, 1, 9, 11, 4, et l'on aura, après la suppression d'un facteur commun,

$$p = -1, \quad q = 1.$$

Mais, en remplaçant dans les formules (10) p et q par -1 et 1, on obtient

$$X = 90, \quad Y = 110, \quad Z = 40,$$

c'est-à-dire la solution (9, 11, 4).

Remarque. — Quand l'équation (3) ne contient que les carrés des inconnues, on peut donner le signe + ou — à x, y, z, et deux solutions, dans lesquelles une ou plusieurs inconnues diffèrent par le signe seulement, doivent être considérées comme identiques. Il suit de là que, dans le cas dont il s'agit, on peut aussi calculer p et q par les formules

$$p = xY + yX, \quad q = xZ + zX.$$

Ainsi, dans l'exemple de Gauss, si l'on applique les formules précédentes pour retrouver la solution (9, 11, 4), on aura

$$p = 23, \quad q = 27,$$

et les valeurs de X, Y, Z que l'on obtiendra seront respectivement égales à 9, 11, 4 multipliés par le produit 23×70.

En faisant $p = 1$, $q = 1$ dans les formules (10), on a encore une solution très simple (5, 1, 4).

4. Nous allons maintenant considérer deux cas particuliers :

Premier cas. — *La somme des coefficients dans l'équation* (1) *est égale à zéro.*

Alors l'équation (1) admet la solution (1, 1, 1), et l'on obtient les formules demandées en remplaçant dans les formules (3) x, y, z par 1.

Deuxième cas. — *La somme des coefficients des carrés de deux inconnues et de leur produit est nulle dans l'équation* (1).

On a, par exemple,

$$a + c + e = 0.$$

Dans ce cas, l'équation (1) admet la solution (1, 0, 1), et, si l'on remplace dans les formules (3) x, y, z, respectivement, par 1, 0, 1, ces formules deviennent

$$(11)\quad \begin{cases} X = -(bp^2 + cq^2 + fpq), \\ Y = (d+f)p^2 + (c-a)pq, \\ Z = -bp^2 - aq^2 + dpq. \end{cases}$$

D'ailleurs les formules (5) donnent en même temps

$$(12)\qquad p = Y, \quad q = Z - X.$$

Dans le cas de l'équation

$$(13)\qquad X^2 + bY^2 + dXY = Z^2,$$

on doit faire dans les formules (11) $e = 0, f = 0, a = 1, c = -1$, et l'on a

$$(14)\quad \begin{cases} \pm X = q^2 - bp^2, \\ \pm Y = dp^2 - 2pq, \\ \pm Z = bp^2 + q^2 - 2dpq. \end{cases}$$

Ces formules sont, comme on le voit, identiques à celles que l'on obtient par la méthode des identités; car

il suffit dans ces dernières de remplacer x, y, a respectivement par q, $-p$ et d [1].

5. Si l'on fait $d = 0$ dans l'équation (13) et les formules correspondantes (14), on a

$$(15) \qquad X^2 + bY^2 = Z^2,$$
$$(16) \qquad \pm X = q^2 - bp^2, \quad \pm Y = 2pq, \quad \pm Z = q^2 + bp^2$$

et les formules (16) donnent toutes les solutions de l'équation (15). Ordinairement on résout cette équation en l'écrivant d'abord sous la forme

$$Z^2 - X^2 = bY^2,$$

et, si l'on décompose b de toutes les manières possibles en deux facteurs premiers entre eux α, β, on est conduit à poser

$$Y = 2pq, \quad (Z + X)(Z - X) = 4\alpha\beta p^2 q^2,$$

d'où

$$Z + X = 2\alpha q^2, \quad Z - X = 2\beta p^2,$$

et l'équation (15) est résolue par l'un quelconque des systèmes

$$(17) \qquad \pm X = \alpha q^2 - \beta p^2, \quad \pm Y = 2pq, \quad \pm Z = \alpha q^2 + \beta p^2,$$

que l'on obtient en décomposant b en deux facteurs α, β premiers entre eux. Mais le système (16), qui correspond à la décomposition de b dans les deux facteurs 1 et b, donne toutes les solutions de l'équation (15). Il est donc inexact de dire, comme le fait Legendre et comme l'ont répété après lui la plupart des auteurs, que « la solution générale comprend autant de formules particulières qu'il y a de manières de décomposer b en deux facteurs

---

[1] *Mémoire sur la résolution en nombres entiers de l'équation* $aX^m + bY^m = cZ^n$ (*Nouvelles Annales*, 2e série, t. XVIII, p. 265).

premiers entre eux ([1]) ». D'ailleurs on voit aisément que chacun des systèmes (17) donne à lui seul toutes les solutions de l'équation (15); car, si dans l'un des systèmes (17) on multiplie les seconds membres par α et que l'on change αq en q, on retombe sur les formules (16).

Cependant, lorsque l'on veut avoir les solutions de l'équation (15) sous leur forme la plus simple, c'est-à-dire telles que X, Y, Z n'aient plus aucun facteur commun, il est bon quelquefois d'employer les systèmes (17). On obtient ainsi un groupement de solutions qui peut être avantageux dans certaines questions. Ainsi, soit l'équation

$$(18) \qquad X^2 - Y^2 = 30Z^2,$$

considérée par Legendre ([2]). On aura les systèmes

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{lll} X = p^2 + 30q^2, & Y = p^2 - 30q^2, & Z = 2pq; \\ X = 2p^2 + 15q^2, & Y = 2p^2 - 15q^2, & Z = 2pq; \\ X = 3p^2 + 10q^2, & Y = 3p^2 - 10q^2, & Z = 2pq; \\ X = 5p^2 + 6q^2, & Y = 5p^2 - 6q^2, & Z = 2pq. \end{array} \right.$$

Dans le premier système on donnera à q une valeur quelconque et à p toutes les valeurs premières avec 30 et q. Dans le second système on donnera à q une valeur impaire et à p toutes les valeurs premières à q et à 15, etc.

6. Nous avons donné la solution complète, en nombres entiers de l'équation (1). Cependant, pour que la question fût parfaitement résolue, il faudrait pouvoir ranger les solutions dans un ordre déterminé, de telle sorte, par exemple, que l'on fût assuré d'avoir toutes les solu-

([1]) Legendre, *Théorie des nombres*, 2e édition, p. 29.
([2]) *Ibid.*

tions dans lesquelles l'une des inconnues est inférieure à un nombre donné. Mais on ne peut guère espérer atteindre ce dernier degré de perfection que pour certaines équations numériques particulières. Soit, par exemple, l'équation (18). On peut d'abord, d'après les formules (19), prendre pour Z tous les nombres pairs rangés par ordre de grandeur croissante, et comme, en général, à chaque valeur de Z correspondent plusieurs systèmes de valeurs de X, Y, on rangera les solutions, correspondant à une même valeur de Z, par rapport aux valeurs croissantes de X. Les formules (19) serviront d'ailleurs à faire la répartition.

Pour obtenir $Z = 2$, on fera $p = 1$, $q = 1$, et l'on aura

$$\left.\begin{array}{ll} X = 11, & Y = 1 \\ X = 13, & Y = 7 \\ X = 17, & Y = 13 \\ X = 31, & Y = 29 \end{array}\right\} Z = 2.$$

On obtient $Z = 4$, en faisant $p = 1$, $q = 2$ ou $p = 2$, $q = 1$, et l'on a

$$\left.\begin{array}{ll} X = 23, & Y = 119 \\ X = 29, & Y = 19 \\ X = 43, & Y = 37 \\ X = 121, & Y = 119 \end{array}\right\} Z = 4.$$

7. Gauss s'est occupé de la résolution de l'équation (1) (¹). Il donne le moyen d'obtenir la solution complète pour chaque équation numérique particulière; mais il ne résout pas l'équation générale à coefficients indéterminés. Cependant sa méthode convenablement modifiée conduit aussi très simplement aux formules (3).

L'illustre géomètre remarque d'abord que, si dans

(¹) *Disquisitiones arithmeticæ*, p. 366.

l'équation (1) le coefficient du carré d'une des inconnues, a, par exemple, est nul, on pourra donner à Y et à Z des valeurs arbitraires p et q, puis déterminer X par l'équation

$$X = -\frac{(bp^2 + cq^2 + fpq)}{dp + eq}.$$

Alors, en réduisant au même dénominateur les valeurs de X, Y, Z et supprimant le dénominateur commun $dp + eq$, on a

$$(20)\qquad \begin{cases} X = -(bp^2 + eq^2 + fpq), \\ Y = p(dp + eq), \\ Z = q(dp + eq). \end{cases}$$

On ramène maintenant le cas général au cas précédent en posant

$$(21)\qquad X = xX', \quad Y = yX' + xY', \quad Z = zX' + xZ',$$

(x, y, z) représentant, comme précédemment, une solution connue de l'équation (1) et X′, Y′, Z′ étant de nouvelles variables. [Les formules (21) remplacent les formules S de Gauss [1]].

Si l'on substitue maintenant dans l'équation (1) à X, Y, Z les expressions données par les formules (21), le coefficient de X'^2 disparaît et on a l'équation

$$\begin{aligned} &bxY'^2 + cxZ'^2 + (dx + 2by + fz)X'Y' \\ &\quad + (ex + fy + 2cz)X'Z' + fxY'Z' = 0. \end{aligned}$$

Or, en appliquant à cette équation les formules (21), on a immédiatement

$$\begin{aligned} X' &= -x(bp^2 + cq^2 + fpq), \\ Y' &= (dx + 2by + fz)p^2 + (ex + fy + 2cz)pq, \\ Z' &= (dx + 2by + fz)pq + (ex + fy + 2cz)q^2, \end{aligned}$$

---

[1] *Disquisitiones arithmeticæ*, p. 366.

et, si l'on remplace dans les formules (21) X', Y', Z' par les valeurs précédentes, on retombe bien sur les formules (3).

8. Traitons maintenant le cas général de l'équation homogène du second degré contenant n variables. Soit

$$(22)\qquad \begin{cases} aX^2 + bY^2 + cZ^2 + hU^2 + \ldots \\ + dXY + eXZ + fYZ + lXU + \ldots = 0 \end{cases}$$

l'équation proposée qu'on suppose résoluble en nombres entiers et dont $(x, y, z, u, \ldots)$ est une solution connue.

Soit représenté par F le premier membre de l'équation (22) dans laquelle on remplace $X, Y, Z, \ldots$ par des nombres entiers quelconques. Posons

$$(23)\qquad \begin{cases} X = \rho x + r, \\ Y = \rho y + p, \\ Z = \rho z + q, \\ U = \rho u + s, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Si l'on remplace dans l'équation (22) $X, Y, Z, U, \ldots$ par les expressions que donnent les formules précédentes, et que l'on développe d'après le théorème de Taylor, en considérant $r, p, q, s, \ldots$ comme les variables et $\rho x, \rho y, \rho z, \rho u, \ldots$ comme les accroissements, on aura

$$\begin{aligned} &F(x, y, z, u, \ldots)\rho^2 \\ &\quad + \left(\frac{dF}{dr}x + \frac{dF}{dp}y + \frac{dF}{dq}z + \frac{dF}{ds}u + \ldots\right)\rho \\ &\quad + F(r, p, q, s, \ldots) = 0. \end{aligned}$$

Le coefficient de ρ^2 étant nul, par hypothèse, on tire de l'équation précédente

$$\rho = -\frac{F(r, p, q, s, \ldots)}{\frac{dF}{dr}x + \frac{dF}{dp}y + \frac{dF}{dq}z + \frac{dF}{ds}u + \ldots},$$

et en remplaçant ρ par sa valeur dans les formules (23), si l'on pose

$$M = \frac{dF}{dr}x + \frac{dF}{dp}y + \frac{dF}{dq}z + \frac{dF}{du}u + \ldots,$$
$$N = F(r, p, q, s, \ldots),$$

on obtient les formules

$$(24) \quad \begin{cases} X = Mr - Nx, \\ Y = Mp - Ny, \\ Z = Mq - Nz, \\ U = Ms - Nu, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{cases}$$

ces formules donnent la solution complète de l'équation (22).

Je dis maintenant que, pour obtenir une solution quelconque (X, Y, Z, U, ...), il suffit de donner aux indéterminées r, p, q, s, ... dans les formules (24) les valeurs X, Y, Z, U, ... elles-mêmes. En effet, N devient nul quand on y remplace r, p, q, s, ... par X, Y, Z, U, ..., et par la même substitution M prend une valeur M_1 égale à $\frac{dF}{dX}x + \frac{dF}{dY}y + \frac{dF}{dZ}z + \frac{dF}{dU}u + \ldots$; les seconds membres des équations (24) deviennent donc respectivement égaux à M_1X, M_1Y, M_1Z, M_1U, ..., c'est-à-dire qu'on retrouve la solution (X, Y, Z, U, ...).

On peut aussi obtenir la solution $(x, y, z, u, \ldots)$ elle-même en remplaçant r, p, q, s, ... respectivement par x, y, z, u, ... En effet, M devient alors égale à $\frac{dF}{dx}x + \frac{dF}{dy}y + \frac{dF}{dz}z + \frac{dF}{du}u + \ldots$, c'est-à-dire, d'après le théorème des fonctions homogènes, à $2F(x, y, z, \ldots)$. Les seconds membres des équations (24) deviennent donc respectivement égaux à x, y, z, u, ... multipliés par un facteur nul. Mais on admet que l'on supprime ce facteur commun comme s'il n'était pas nul.

9. On peut voir aisément que les formules (24) ne contiennent que $n-1$ variables distinctes. En effet, si l'on pose $\rho x + r = \rho'$, d'où l'on tire $\rho = \rho' - \frac{r}{x}$, et que l'on remplace dans les équations (23) ρ par $\rho' - \frac{r}{x}$, il vient

$$X = \rho' x,$$
$$Y = \rho' y + p - \frac{ry}{x},$$
$$Z = \rho' z + q - \frac{rz}{x},$$
$$U = \rho' u + s - \frac{ru}{x},$$
$$\dots\dots\dots\dots,$$

ou, en posant

$$p - \frac{ry}{x} = p', \quad q - \frac{rz}{x} = q', \quad s - \frac{ru}{x} = s', \quad \dots,$$

$$(25) \qquad \left\{ \begin{array}{l} X = \rho' x, \\ Y = \rho' y + p', \\ Z = \rho' z + q', \\ U = \rho' u + s', \\ \dots\dots\dots\dots \end{array} \right.$$

Ces dernières formules ne contiennent plus que les $n-1$ variables p', q', s', ... Il suit de là que, si l'on refait les calculs du paragraphe précédent en employant les formules (25) au lieu des formules (23), les nouvelles formules qui remplaceront les formules (24) s'en déduiront en y faisant $r = 0$, car on peut remplacer p', q', s', ... par p, q, s, ... Ainsi les formules (24) conservent la même généralité avec $n-1$ variables seulement.

r étant supposé nul dans les formules (24), demandons-nous quelles valeurs doivent y prendre p, q, s, ... pour que leurs seconds membres donnent la solution (X, Y, Z, U, ...). Si nous remettons pour un moment

dans les formules (24), où l'on a fait $r=0, p', q', s', \ldots$ à la place de $p, q, s, \ldots$, il est clair que, pour revenir aux formules (24) elles-mêmes, on devra, dans les nouvelles formules, remplacer $p', q', s', \ldots$ respectivement par $p-\frac{ry}{x}$, $q-\frac{rz}{x}$, $s-\frac{ru}{x}$, ... D'ailleurs, comme on obtient la solution (X, Y, Z, U, ...) en donnant dans les formules (24) à $r, p, q, s, \ldots$ les valeurs X, Y, Z, U, ... elles-mêmes, on devra, dans les nouvelles formules, remplacer $p', q', s', \ldots$ respectivement par

$$\mathrm{Y}-\frac{y\mathrm{X}}{x},\quad \mathrm{Z}-\frac{z\mathrm{X}}{x},\quad \mathrm{U}-\frac{u\mathrm{X}}{x},\quad \ldots,$$

ou, en réduisant au même dénominateur x que l'on supprime, on aura, après avoir effacé les accents de $p', q', s', \ldots$,

$$(26)\qquad p=x\mathrm{Y}-y\mathrm{X},\quad q=x\mathrm{Z}-z\mathrm{X},\quad s=x\mathrm{U}-u\mathrm{X},\quad \ldots.$$

Ce sont les formules demandées; les formules (5) en sont un cas particulier.

On peut faire une démonstration directe. En effet, remarquons que, si l'on remplace dans les formules (24) r par $x\mathrm{X}-x\mathrm{X}$ et $p, q, s, \ldots$ par les valeurs que donnent les formules (25), en observant que l'on a

$$\begin{aligned}&\frac{d\mathrm{F}}{dr}x+\frac{d\mathrm{F}}{dp}y+\frac{d\mathrm{F}}{dq}z+\frac{d\mathrm{F}}{ds}u+\ldots\\&\quad=\frac{d\mathrm{F}}{dx}r+\frac{d\mathrm{F}}{dy}p+\frac{d\mathrm{F}}{dz}q+\frac{d\mathrm{F}}{du}s+\ldots,\end{aligned}$$

il vient pour la valeur M_1 de M

$$\begin{aligned}\mathrm{M}_1&=\frac{d\mathrm{F}}{dx}(x\mathrm{X}-x\mathrm{X})+\frac{d\mathrm{F}}{dy}(x\mathrm{Y}-y\mathrm{X})\\&\quad+\frac{d\mathrm{F}}{dz}(x\mathrm{Z}-z\mathrm{X})+\frac{d\mathrm{F}}{du}(x\mathrm{U}-u\mathrm{X})+\ldots\\&=x\left(\frac{d\mathrm{F}}{dx}\mathrm{X}+\frac{d\mathrm{F}}{dy}\mathrm{Y}+\frac{d\mathrm{F}}{dz}\mathrm{Z}+\frac{d\mathrm{F}}{du}\mathrm{U}+\ldots\right),\end{aligned}$$

la somme des autres termes étant nulle en vertu du théorème des fonctions homogènes. Calculons maintenant la valeur N_1 de N. On a

$$N_1 = F(xX - xX,\ xY - yX,\ xZ - zX,\ xU - uX,\ \ldots),$$

et, en développant le second membre d'après le théorème de Taylor, $-xX$, $-yX$, $-zX$, $-uX$, ... étant considérées comme les variables et xX, xY, xZ, xU, ... comme les accroissements, on obtient

$$\begin{aligned} N_1 &= -XF(x, y, z, u, \ldots) \\ &\quad - Xx\left(\frac{dF}{dx}X + \frac{dF}{dy}Y + \frac{dF}{dz}Z + \frac{dF}{du}U + \ldots\right) \\ &\quad + xF(X, Y, Z, U, \ldots) \\ &= -Xx\left(\frac{dF}{dx}X + \frac{dF}{dy}Y + \frac{dF}{dz}Z + \frac{dF}{du}U + \ldots\right). \end{aligned}$$

Cela posé, le second membre de la première des formules (24), comme r est nul, se réduit à

$$Xx^2\left(\frac{dF}{dx}X + \frac{dF}{dy}Y + \frac{dF}{dz}Z + \frac{dF}{du}U + \ldots\right).$$

Quant au second membre de la deuxième des formules (24), il devient

$$x\left(\frac{dF}{dx}X + \frac{dF}{dy}Y + \frac{dF}{dz}Z + \frac{dF}{du}U + \ldots\right)(xY - yX + yX),$$

c'est-à-dire

$$Yx^2\left(\frac{dF}{dx}X + \frac{dF}{dy}Y + \frac{dF}{dz}Z + \frac{dF}{du}U + \ldots\right).$$

Le calcul est semblable pour les autres équations. On obtient ainsi, dans les seconds membres des formules (24), X, Y, Z, U, ... multipliés par le facteur constant

$$x^2\left(\frac{dF}{dx}X + \frac{dF}{dy}Y + \frac{dF}{dz}Z + \frac{dF}{du}U + \ldots\right);$$

la proposition est donc démontrée.

SUR LE CALCUL DES DÉRIVÉES A INDICES QUELCONQUES;

PAR M. H. LAURENT.

I.

La première idée du calcul des dérivées à indices quelconques remonte à Leibnitz; mais c'est à Liouville que l'on doit d'avoir montré tout le parti que l'on pouvait tirer de cette généralisation du Calcul différentiel, et l'on peut le regarder comme le véritable créateur de la nouvelle théorie.

Pour Liouville, si l'on a

$$f(x) = \Sigma A e^{\alpha x},$$

la dérivée d'ordre n de $f(x)$ sera $\Sigma A \alpha^n e^{\alpha x}$, A, α et n désignant des nombres quelconques indépendants de x. Cette définition de la dérivée $n^{\text{ième}}$ présente des inconvénients, qu'il serait trop long d'énumérer complètement, et qui d'ailleurs sont aujourd'hui bien connus.

M. Letnikoff, en 1874, a proposé une nouvelle définition des dérivées à indices fractionnaires, à laquelle il n'y a point de reproche à adresser. Pour lui, la dérivée d'ordre $-p$, p désignant un nombre positif, de la fonction $f(x)$, prise entre les limites x_0 et x, est la valeur de l'intégrale

$$\frac{1}{\Gamma(p)} \int_{x_0}^{x} f(z)(x-z)^{p-1}\,dz.$$

Lorsque cette intégrale n'a plus de sens, c'est-à-dire lorsque le nombre p devient négatif, la dérivée de $f(x)$ est définie comme dérivée d'un ordre entier d'une dérivée d'ordre négatif. La définition de M. Letnikoff est plus

générale que celle de Liouville, elle donne d'ailleurs les mêmes résultats toutes les fois que cette dernière donne des résultats précis.

Je propose une nouvelle définition de la dérivée, qui au fond revient à celle de M. Letnikoff, mais qui est plus immédiatement accessible aux calculs, en ce sens qu'elle fournit directement l'expression de la dérivée dont on a besoin.

II.

J'appelle dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction monogène $f(x)$, prise entre les limites x_0 et x, ou prise à partir de la limite x_0, l'intégrale

$$\frac{\Gamma(n+1)}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{f(z)\,dz}{(z-x)^{n+1}}, \tag{1}$$

prise le long d'un lacet ayant son origine au point x_0, ses bords rectilignes et sa partie circulaire décrite autour du point x comme centre. La fonction $\Gamma(n+1)$ qui figure dans cette expression représentant non pas la fonction eulérienne de seconde espèce, mais bien la fonction que Gauss a substituée à cette intégrale pour interpoler le produit $1.2.3\ldots n$, fonction qui est monodrome et monogène dans toute l'étendue du plan et qui a pour infinis les points $0, -1, -2, -3, \ldots$.

La fonction $(z-x)^{n+1}$ pouvant avoir une infinité de valeurs, la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $f(x)$ pourra aussi avoir une infinité de valeurs; mais, quand on se sera donné la valeur initiale de cette fonction en x_0, la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $f(z)$ sera bien déterminée (nous écartons, bien entendu, le cas où, sur le lacet même, la fonction f deviendrait infinie ou discontinue).

Considérons d'abord le cas où $n+1$ est moindre que un : alors l'intégrale (1), prise le long du cercle du lacet,

est nulle, et sa valeur, prise le long du premier bord du lacet, est

$$\frac{\Gamma(n+1)}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{x_0}^{x}\frac{f(z)\,dz}{(z-x)^{n+1}};$$

sa valeur prise le long du second bord est

$$\frac{\Gamma(n+1)}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{x}^{x_0}\frac{f(z)\,dz}{(z-x)^{n+1}}\,e^{-2(n+1)\pi\sqrt{-1}}.$$

La présence du facteur exponentiel provient de ce que le point z a tourné autour du point critique x, en sorte que la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $f(x)$ sera

$$\frac{\Gamma(n+1)}{2\pi\sqrt{-1}}\left(1-e^{-2(n+1)\pi\sqrt{-1}}\right)\int_{x_0}^{x}\frac{f(z)\,dz}{(z-x)^{n+1}},$$

ce que l'on peut écrire

$$\frac{\Gamma(n+1)}{\pi}\,\frac{e^{(n+1)\pi\sqrt{-1}}-e^{-(n+1)\pi\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\int_{x_0}^{x}\frac{f(z)\,dz}{(x-z)^{n+1}}$$

ou

$$(2)\qquad \Gamma(n+1)\frac{\sin(n+1)\pi}{\pi}\int_{x_0}^{x}\frac{f(z)\,dz}{(x-z)^{n+1}};$$

mais on sait que

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

En faisant $a=n+1$, cette formule devient

$$\Gamma(n+1)\Gamma(-n)=\frac{\pi}{\sin(n+1)\pi};$$

tirant $\Gamma(n+1)$ de là, pour porter sa valeur dans l'expression (2), celle-ci devient

$$\frac{1}{\Gamma(-n)}\int_{x_0}^{x}\frac{f(z)}{(x-z)^{n+1}}\,dz.$$

Cette valeur de la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $f(x)$ coïncide avec celle qui sert de définition à M. Letnikoff.

Lorsque le nombre n est positif, il n'est plus permis de négliger l'intégrale de $\frac{f(z)}{(z-x)^{n+1}}dz$ prise le long de la partie circulaire du lacet; il y a plus, lorsque n est entier, les intégrales prises le long des bords se détruisent et il reste seulement l'intégrale prise le long de la partie circulaire qui a pour valeur, en vertu du calcul des résidus, la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $f(x)$, le mot *dérivée* étant pris ici avec son sens ordinaire : ces dérivées d'ordre entier et positif sont donc toutes égales et indépendantes de la limite x_0.

Nous désignerons par $\int_{x_0}^{x}\frac{d^nf}{dx^n}$ ou par $\int_{x_0}^{x}\frac{d^nf}{dz^n}$ la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $f(x)$ prise entre les limites x_0 et x, le symbole $\frac{d^nf}{dx^n}$ désignant l'intégrale indéfinie

$$\frac{\Gamma(n+1)}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{f(z)}{(z-x)^{n+1}}dz,$$

prise en laissant indéterminée l'origine x_0 du lacet le long duquel s'effectue l'intégration.

III.

Envisageons maintenant l'intégrale

$$\frac{\Gamma(n+1)}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{f(z)\,dz}{(z-x)^{n+1}},$$

et faisons varier x; elle a une, plusieurs ou même une infinité de valeurs pour chaque valeur de x, provenant de ce que, pour $x=x_0$, on a pu choisir l'une quelconque des valeurs que peut prendre $(z-x)^{n+1}$. Ces valeurs se permuteront entre elles quand le point x tournera autour de x_0; en effet, si l'on considère un point z voisin de x_0 sur le premier bord du lacet, ce point tournera

autour de x_0 en même temps que le point x. Les valeurs de $(z-x)^{n+1}$ se permuteront l'une dans l'autre en vertu de la loi de continuité; et, si l'on s'est donné une valeur initiale de $(z-x)^{n+1}$, on ne sera plus maître de la choisir arbitrairement, à chaque valeur de la dérivée que l'on voudra calculer, si l'on s'astreint à ne pas rompre la continuité.

Ainsi, pour les dérivées qui ne sont pas d'un ordre entier, la limite inférieure est un point de ramification algébrique quand l'ordre de la dérivée est commensurable, transcendant, dans le cas contraire. Ce fait n'était pas mis en lumière dans la théorie de M. Letnikoff.

Ces conclusions supposent que, pendant que le point x tourne autour de x_0, les bords du lacet ne rencontrent pas de point pour lequel $f(z)$ cesserait d'être synectique; mais il sera facile de corriger nos conclusions dans chaque cas particulier, quand on connaîtra la nature des points singuliers franchis par les bords du lacet.

IV.

Avant d'aller plus loin, montrons comment on calcule les dérivées de quelques fonctions.

Dérivées d'une constante. — La dérivée $n^{\text{ième}}$ de la constante a est égale à

$$\frac{1}{\Gamma(-n)}\int_{x_0}^{x}\frac{a\,dz}{(z-x)^{n+1}}.$$

Si n est négatif, changeons n en $-m$ et nous aurons

$$\frac{1}{\Gamma(m)}\int_{x_0}^{x}a(z-x)^{m-1}\,dz$$

ou bien

$$-\frac{a}{\Gamma(m+1)}(x-x_0)^m=-\frac{a}{\Gamma(-n+1)}(x-x_0)^{-n};$$

d'une manière générale, la dérivée cherchée est égale à l'intégrale

$$a\frac{\Gamma(n+1)}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{dz}{(z-x)^{n+1}}.$$

On peut prendre pour contour d'intégration un cercle décrit du point x comme centre avec la distance xx_0 pour rayon; en appelant r cette distance et θ_0 l'angle que xx_0 fait avec l'axe des x, la dérivée cherchée devient

$$a\frac{\Gamma(n+1)}{2\pi}\int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} d\theta\, r^{-n}e^{-n\theta\sqrt{-1}},$$

c'est-à-dire

$$-a\frac{\Gamma(n+1)}{2\pi n}\frac{e^{-2n\pi\sqrt{-1}}}{r^n e^{n\theta_0\sqrt{-1}}}=-a\frac{\Gamma(n+1)}{2\pi n}(e^{-2\pi n}-1)(x_0-x)^{-n}.$$

Une transformation analogue à celle que nous avons faite plus haut donne

$$-\frac{a}{\Gamma(-n+1)}(x-x_0)^{-n}.$$

Pour prendre la dérivée d'ordre $n+\varphi$ d'une fonction, n désignant un entier et φ un nombre compris entre o et -1, il suffit de prendre la dérivée d'ordre φ et de la différentier n fois, le mot *différentier* étant pris ici dans son acception ordinaire; cette règle, prise comme définition par M. Letnikoff, résulte de la formule

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dx^n}\frac{\Gamma(\varphi+1)}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{f(z)\,dz}{(z-x)^{\varphi+1}}\\ &=\frac{\Gamma(\varphi+1)}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{f(z)\,dz}{(z-x)^{n+\varphi+1}}(\varphi+1)(\varphi+2)\ldots(\varphi+n)\\ &=\frac{\Gamma(n+\varphi+1)}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{f(z)\,dz}{(z-x)^{n+\varphi+1}}.\end{aligned}$$

Il peut être utile parfois de changer la limite x_0 à partir de laquelle on prend une dérivée : voici comment

on peut procéder quand l'ancienne limite x_0, la nouvelle x'_0 et le point x forment un triangle qui, dans son intérieur, ne contient pas de point critique de $f(z)$.

Le lacet qui a pour bords la droite $x_0 x$ peut être remplacé par le contour équivalent formé d'une droite allant de x_0 en x'_0, d'un lacet ayant pour bords la droite $x'_0 x$ et d'une droite allant de x'_0 en x_0; en intégrant alors la fonction $\frac{\Gamma(n+1)}{2\pi\sqrt{-1}} \frac{f(z)\,dz}{(z-x)^{n+1}}$ successivement le long du lacet qui a pour bords $x_0 x$ et le long du contour que nous venons de définir, on a

$$\int_{x_0}^{x} \frac{d^n f}{dx^n} = \int_{x_0}^{x'_0} \frac{\Gamma(n+1)}{2\pi\sqrt{-1}} \frac{f(z)\,dz}{(z-x)^{n+1}} + \int_{x'_0}^{x} \frac{d^n f}{dx^n} + \int_{x'_0}^{x} \frac{\Gamma(n+1)}{2\pi\sqrt{-1}} \frac{f(z)\,dz}{(z-x)^{n+1}} e^{-2\pi(n+1)\sqrt{-1}}$$

ou, à l'aide d'une transformation déjà effectuée,

$$\int_{x_0}^{x} \frac{d^n f}{dx^n} = \int_{x'_0}^{x} \frac{d^n f}{dx^n} + \frac{1}{\Gamma(-n)} \int_{x_0}^{x'_0} \frac{f(z)\,dz}{(x-z)^{n+1}}.$$

Dans le cas où le triangle $x_0 x'_0 x$ contiendrait des points critiques de $f(z)$, la formule précédente subsisterait; mais l'intégrale qui figure dans cette formule devrait être prise le long d'un contour curviligne, formant avec $x_0 x$ et $x x'_0$ un contour fermé ne renfermant pas de point critique de $f(z)$.

Dérivées d'une puissance. — En supposant n positif, la dérivée d'ordre $-n$ de $(x-a)^p$ est

$$\frac{1}{\Gamma(n)} \int_{x_0}^{x} (x-z)^{n-1} (z-a)^p \, dz.$$

Si l'on pose

$$\theta = \frac{z-a}{x-a},$$

cette intégrale devient

$$\frac{(x-a)^{n+p}}{\Gamma(n)}\int_{\frac{x_0-a}{x-a}}^{1}(1-\theta)^{n-1}\theta^p\,d\theta.$$

Si alors on suppose $x_0 = a$, la dérivée cherchée se réduit à

$$\frac{(x-a)^{n+p}}{\Gamma(n)}\mathrm{B}(n, p+1) = \frac{(x-a)^{n+p}}{\Gamma(n)}\,\frac{\Gamma(n)\Gamma(p+1)}{\Gamma(n+p+1)}$$

ou à

$$(x-a)^{n+p}\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(n+p+1)};$$

par suite, la dérivée d'ordre n est

$$(x-a)^{p-n}\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-n+1)}.$$

Dérivées de e^{ax}. — La dérivée de e^{ax} d'ordre $-n$ est

$$\frac{1}{\Gamma(n)}\int_{x_0}^{x}(x-z)^{n-1}e^{az}\,dz$$

ou, en posant $z = x - t$,

$$-\frac{e^{ax}}{\Gamma(n)}\int_{x-x_0}^{0}t^{n-1}e^{-at}\,dt.$$

On voit que, si $x_0 = -\infty$, la dérivée cherchée sera $\frac{e^{ax}}{a^n}$, en supposant a positif (si a était négatif, ce résultat serait encore exact, mais il faudrait supposer $x_0 = +\infty$), et que la dérivée d'ordre n de e^{ax} sera $a^n e^{ax}$, comme par la méthode de Liouville. Notre manière de prendre les dérivées comprend donc celle de MM. Liouville et Letnikoff; elle est plus générale que celle de Liouville et considère les valeurs multiples des dérivées, valeurs que M. Letnikoff n'envisageait pas.

V.

Nous allons encore démontrer que

$$\int_{x_0}^{x} \frac{d^n}{dx^n} \int_{x_0}^{x} \frac{d^m f}{dx^m} = \int_{x_0}^{x} \frac{d^m}{dx^m} \int_{x_0}^{x} \frac{d^n f}{dx^n} = \int_{x_0}^{x} \frac{d^{m+n} f}{dx^{m+n}};$$

à cet effet, observons que

$$\int_{x_0}^{x} \frac{d^n f}{dx^n} = \frac{\Gamma(n+1)}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{f(z)\,dz}{(z-x)^{n+1}}.$$

Pour prendre la dérivée d'ordre m, on peut différentier sous le signe $\int$, puisque cette différentiation revient à une intégration et à une multiplication par un facteur constant; on a donc

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x} \frac{d^m}{dx^m} \int_{x_0}^{x} \frac{d^n f}{dx^n} &= \frac{\Gamma(n+1)}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{f(z)\,dz}{(z-x)^{m+n+1}} \frac{\Gamma(m+n+1)}{\Gamma(n+1)} \\ &= \frac{\Gamma(m+n+1)}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{f(z)\,dz}{(z-x)^{m+n-1}} \\ &= \int_{x_0}^{x} \frac{d^{m+n} f(z)}{dx^{m+n}}, \qquad \text{C. Q. F. D.} \end{aligned}$$

VI.

La règle de la différentiation d'un produit s'applique encore quand il s'agit de dérivées à indices quelconques; il s'agit pour le prouver de vérifier la formule

$$\int_{x_0}^{x} \frac{d^n \varphi(x)\psi(x)}{dx^n} = \varphi(x) \int_{x_0}^{x} \frac{d^n \psi}{dx^n} + \frac{n}{1} \frac{d\varphi}{dx} \int_{x_0}^{x} \frac{d^{n-1}\psi}{dx^{n-1}} + \ldots,$$

que l'on peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(n+1)}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{\varphi(z)\psi(z)\,dz}{(z-x)^{n+1}} &= \frac{\Gamma(n+1)}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{\varphi(x)\psi(z)}{(z-x)^{n+1}} dz \\ &+ \frac{\Gamma(n)}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{\varphi'(x)\psi(z)}{(z-x)^{n}} dz + \ldots \end{aligned}$$

ou bien

$$\frac{\Gamma(n+1)}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{\varphi(z)\psi(z)\,dz}{(z-x)^{n+1}}$$

$$=\frac{\Gamma(n+1)}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{\psi(z)\left[\varphi(x)+\frac{z-x}{1}\varphi'(x)+\ldots\right]dz}{(z-x)^{n+1}},$$

c'est-à-dire, si la fonction φ est développable par la formule de Taylor

$$\frac{\Gamma(n+1)}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{\varphi(z)\psi(z)\,dz}{(z-x)^{n+1}}=\frac{\Gamma(n+1)}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{\varphi(z)\psi(z)\,dz}{(z-x)^{n+1}}.$$

Ainsi la règle de Leibnitz sera encore applicable pour des valeurs fractionnaires ou incommensurables de l'indice n, si la fonction $\varphi(z)$ est monodrome et monogène, finie et continue à l'intérieur d'un cercle ayant pour centre le point x et pour rayon la droite xx_0 qui joint le point x à la limite x_0 à partir de laquelle on prend les dérivées. Comme l'on voit, la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit pourra en général se développer de deux manières en série convergente. Souvent l'un des développements sera impossible, tandis que l'autre le sera; quelquefois ils seront, eu égard à la limite choisie x_0, impossibles tous deux.

L'application de la règle de Leibnitz permettra de généraliser une foule de formules importantes : elle permettra, par exemple, d'obtenir très simplement la formule de Vandermonde connue sous le nom de *binôme des factorielles*. On obtient cette formule en différentiant n fois les deux membres de l'équation identique

$$x^{a+b}=x^a x^b,$$

ce qui donne, en prenant pour limite $x_0=0$,

(1)
$$\left\{\begin{aligned}\frac{\Gamma(a+b-1)}{\Gamma(a+b-n+1)}&=\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a-n+1)}+\frac{n}{1}\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a-n+2)}b\\&+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a-n+3)}b(b-1).\end{aligned}\right.$$

Pour que cette formule ait lieu, il faut que la fonction x^b soit monodrome, monogène, finie et continue à l'intérieur d'un cercle ayant son centre en x et pour rayon la droite ox. C'est ce qui aura lieu si l'exposant b est entier et positif.

Dans le cas où b est un nombre quelconque, la formule (1) cesse d'avoir lieu; mais il est aisé de la corriger en ajoutant aux dérivées qui entrent dans la formule les termes nécessaires pour modifier la limite à partir de laquelle elles sont prises : la nouvelle limite x_0 devra être telle que le cercle de rayon xx_0 ne contienne pas dans son intérieur le point o.

VII.

Le calcul des dérivées à indices quelconques n'est pas un pur objet de curiosité; Liouville et M. Serret en ont fait de très heureuses applications auxquelles il ne manque qu'un peu de précision que les théories précédentes viendront apporter.

On sait qu'un grand nombre d'équations différentielles linéaires s'intègrent au moyen de dérivées lorsque certains paramètres sont entiers : nous citerons, par exemple, les équations auxquelles satisfont les fonctions X_n de Legendre, les fonctions de M. Hermite et en général les fonctions $\varphi_n(x)$ qui satisfont aux équations

$$\int_a^b \varphi_n(x)\,\theta(x)\,dx = 0, \quad \int_b^c \varphi_n(x)\,\theta(x)\,dx = 0,$$

$\theta(x)$ désignant un polynôme de degré inférieur à n.

Pour satisfaire aux équations en question quand le paramètre n, au lieu d'être entier est quelconque, il suffit de remplacer dans les anciennes solutions les dérivées d'ordre entier par des dérivées à indices quelconques.

Ce fait seul justifierait l'introduction du nouvel algorithme dans l'Analyse; mais Liouville a montré que, à

l'aide des dérivées à indices fractionnaires, on pouvait encore intégrer l'équation différentielle à laquelle satisfait la série hypergéométrique. Je vais montrer comment on peut, plus généralement, abaisser certaines équations linéaires. Ces équations sont de la forme

$$P_m \frac{d^m y}{dx^m} + P_{m-1} \frac{d^{m-1} y}{dx^{m+1}} + \ldots + P_0 y = 0,$$

P_i désignant en général un polynôme du degré i en x. On posera

$$y = \int_0^x \frac{d^\mu z}{dx^\mu},$$

μ désignant un indice quelconque; on aura alors

$$P_m \int_0^x \frac{d^{m+\mu} z}{dx^{m-\mu}} + P_{m-1} \int_0^x \frac{d^{m+\mu-1} z}{dx^{m+\mu-1}} + \ldots + P_0 \int_0^x \frac{d^\mu z}{dz^\mu} = 0.$$

Si l'on différentie cette formule avec l'indice $-\mu$, on aura un résultat de la forme

$$P_m \frac{d^m z}{dx^m} + Q_{m-1} \frac{d^{m-1} z}{dx^{m+1}} + \ldots + Q_1 \frac{dz}{dx} + Q_0 z = 0,$$

Q_{m-1}, Q_{m-2}, ..., Q_0 désignant des polynômes entiers en x contenant le paramètre μ, le premier au premier degré, etc., et Q_0 au degré m. Si l'on pose

$$Q_0 = 0,$$

on aura n valeurs de μ annulant Q_0 et ramenant l'équation proposée à une autre linéaire de même ordre, mais ne contenant plus z, c'est-à-dire susceptible de s'abaisser en prenant $\frac{dz}{dx}$ pour variable.

Le calcul des dérivées à indices quelconques vient ajouter un chapitre au calcul inverse des intégrales définies. Liouville a montré comment on pouvait l'appliquer à la recherche des courbes tautochrones; je vais

montrer comment on peut en faire usage pour résoudre une équation rencontrée par Abel en cherchant à résoudre un problème de Mécanique. Il s'agit de l'équation

$$\varphi(a) = \int_{x=0}^{x=a} \frac{ds}{\sqrt{a-x}};$$

$\varphi(a)$ est donné ainsi que a, et il s'agit d'exprimer s en fonction de x. Nous ferons $s = \theta(x)$, et nous aurons

$$\varphi(a) = \int_0^a \frac{\theta'(x)\,dx}{(a-x)^{\frac{1}{2}}};$$

nous en tirons

$$\frac{1}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}\varphi(a) = \frac{1}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}\int_0^a \frac{\theta'(x)\,dx}{(a-x)^{\frac{1}{2}}}.$$

Or le second membre est

$$\int_0^a \frac{d^{-\frac{1}{2}}\theta'(a)}{d^{-\frac{1}{2}}a} \quad \text{et} \quad \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

on a donc

$$\frac{\varphi(a)}{\sqrt{\pi}} = \int_0^a \frac{d^{\frac{1}{2}}\theta(a)}{d^{\frac{1}{2}}\theta(a)};$$

il en résulte

$$\theta(a) = s = \int_0^a \frac{d^{-\frac{1}{2}}\varphi(a)}{\sqrt{\pi}\,d^{-\frac{1}{2}}a} = \frac{1}{\pi}\int_0^a \frac{\varphi(x)\,dx}{(a-x)^{\frac{1}{2}}}.$$

Cette solution coïncide avec celle d'Abel.

CORRESPONDANCE.

Monsieur,

Permettez-moi de répondre à la Lettre de M. Gilbert. Ses observations n'ajoutent rien à la rigueur de la

démonstration de M. Jordan. Il suppose fixes les valeurs successivement interpolées dans l'intervalle considéré; mais, dans mon exemple, on peut bien les supposer fixes, et le raisonnement subsistera toujours, si les deux premières conservent la forme $\frac{1}{(2n+1)\pi}$ et $\frac{1}{2n\pi}$.

Enfin on a toujours un système de quantités $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ dont chacune a pour limite zéro, mais dont le nombre croît indéfiniment; et, quand cela arrive, on ne peut pas conclure en général que leur maximum tende aussi vers zéro.

M. Gilbert dit que le théorème sera démontré si l'on prouve que, pour *un* mode de division, les ε ont pour limite zéro. Si l'on entend par ces mots que, pour un mode de division, le maximum des ε a pour limite zéro, la proposition est juste; mais, comme cela n'arrive pas pour *tout* mode de division, le théorème résultera démontré lorsque M. Gilbert aura trouvé ce mode particulier de division, pour lequel la condition précédente est satisfaite.

Et je dis cela sans malice, parce que ce mode existe, mais je laisserai le soin de le trouver à M. Gilbert; et, pour bien fixer la question, je lui propose de démontrer ce théorème, dont il se sert :

Si $f(x)$ a une dérivée déterminée et finie $f'(x)$ pour toutes les valeurs de x appartenant à un intervalle fini (a, b), étant fixée une quantité ε arbitrairement petite, on peut toujours diviser l'intervalle (a, b) avec les points

$$x_0 = a, \quad x_1, \; x_2, \; \ldots, \; x_{n-1}, \; x_n = b,$$

de façon que chacune des différences

$$\frac{f(a_{r+1}) - f(a_r)}{a_{r+1} - a_r} - f'(a_r) \quad (r = 0, 1, \ldots, n-1)$$

soit, en valeur absolue, moindre que ε.

J'ai dit, dans ma première lettre, qu'on démontre facilement la formule

$$f(x+h)-f(x) = hf'(x+\theta h),$$

sans supposer la continuité de la dérivée, mais seulement son existence (c'est-à-dire l'existence d'une dérivée déterminée et finie pour toutes les valeurs de la variable dans l'intervalle considéré). J'ai appris cette démonstration de M. Genocchi, quand j'étais étudiant; elle est due à M. Ossian Bonnet, et se trouve dans le *Cours de Calcul* de M. Serret (2ᵉ édit., p. 17); mais il y a quelques petites imperfections, qui peuvent expliquer pourquoi M. Jordan a des doutes sur sa rigueur. Mais elle se trouve aussi parfaitement rigoureuse dans :

Dini, *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali*, p. 75; Pisa, 1878.

Harnack, *Differential- und Integralrechnung*, p. 64; Leipzig, 1881.

Pasch, *Einleitung in die Diff.- und Integralrechnung*, p. 83; Leipzig, 1882, etc. (1).

L'exemple cité par M. Gilbert, pour prouver que le théorème est inexact, ne satisfait pas aux conditions du théorème. En effet, la fonction de M. Gilbert a, pour $x = a$, ce qu'on appelle une dérivée à gauche et une dérivée à droite (*rückwärts und vorwärts genommene Differential-Quotienten*), et n'a pas une dérivée ordinaire déterminée.

J'ajouterai enfin, en réponse à M. Jordan, que si $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ tend uniformément vers $f'(x)$, cette dérivée est continue, et réciproquement.

J'ai l'honneur d'être, etc. G. Peano.

---

(1) J'ai envoyé cette démonstration à M. Jordan, il y a quelque temps; mais vous la trouverez ci-jointe. G. P.

Voici la démonstration de la formule

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x+\theta h).$$

THÉORÈME I (de Rolle). — *Si $f(x)$ a une dérivée déterminée et finie $f'(x)$ pour toutes les valeurs de x appartenant à l'intervalle (a, b), et si $f(a)=0$, $f(b)=0$, on a, pour une certaine valeur x_1 de x comprise dans l'intérieur du même intervalle,*

$$f'(x_1)=0.$$

En effet, $f(x)$, ayant une dérivée, est continue; et, en variant x entre a et b, $f(x)$ prendra sa plus grande et sa plus petite valeur. Si ces valeurs extrêmes sont toutes les deux nulles, la fonction sera constamment nulle, et l'on aura aussi

$$f'(x)=0.$$

Si elles ne sont pas toutes les deux nulles, soit x_1 la valeur de x par laquelle $f(x)$, sans être nulle, devient maximum ou minimum. La valeur x_1 est intérieure à l'intervalle (a, b), car $f(a)=0$, et $f(b)=0$; et pour $x=x_1$ la fonction n'est ni croissante ni décroissante; donc $f'(x_1)$ n'est ni négative ni positive; et, comme on a supposé qu'elle est déterminée et finie, elle sera nulle.

THÉORÈME II. — *Si $f(x)$ a une dérivée déterminée et finie $f'(x)$ pour toutes les valeurs de x appartenant à l'intervalle (a, b), on a*

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(x_1),$$

où x_1 est une valeur de x comprise entre a et b.

En effet, en appliquant le théorème précédent à la fonction

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{x-a}{b-a}[f(b)-f(a)],$$

pour laquelle

$$F(a) = 0, \quad F(b) = 0, \quad F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

on aura

$$F'(x_1) = 0$$

ou

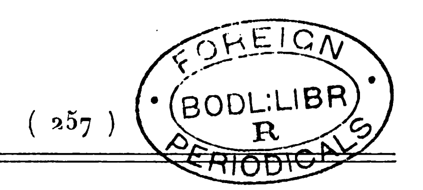
$$f'(x_1) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

On voit qu'on ne suppose nullement la continuité de la dérivée, mais seulement son existence. On peut faire abstraction de son existence pour les valeurs $x = a$ et $x = b$, mais en supposant $f(x)$ continue pour ces valeurs ; le théorème reste encore vrai si la dérivée devient infinie, mais de signe déterminé.

Cette démonstration est de M. Ossian Bonnet.

G. P.

C'est par erreur que nous avons oublié de mentionner : M. Moret-Blanc, comme ayant résolu les questions 1285, 1459 et 1474 ; M. A. Droz, comme ayant résolu la question 1459 ; MM. Basille Dolguinzerve, de Moscou, E. Barisien, lieutenant au 141e de ligne, et Henry Bourget, comme ayant résolu la question 1462 ; MM. Ph. Anstett, élève du lycée de Lyon, E. Barisien, E. Brassart, et un anonyme, comme ayant résolu la question 1463 ; MM. Ph. Anstett, E. Barisien, E. Brassart et M. Genty, élève du lycée Charlemagne, comme ayant résolu la question 1465 ; MM. E. Barisien, L. Clément, élève du lycée de Rouen, et M. Genty, comme ayant résolu la question 1466 ; MM. E. Barisien, L. Clément et P. Terrier, comme ayant résolu la question 1472 ; MM. F. Borletti et N. Goffart, comme ayant résolu la question 1474.



REMARQUES SUR UNE NOTE DE M. IBACH;

PAR M. P. TARDY, à Gênes.

Dans le dernier Cahier, page 172, M. Ibach donne une méthode pour intégrer les équations linéaires simultanées du premier ordre

$$\frac{dy}{dx} + P_1 y + Q_1 z = v_1,$$

$$\frac{dz}{dx} + P_2 y + Q_2 z = v_2,$$

dans le cas où, entre les fonctions P_1, Q_1, P_2, Q_2 de la variable x, existe une relation

$$\frac{\sqrt{P_2}}{\sqrt{Q_1}} = e^{\int (P_1 - Q_2)\,dx}.$$

On arrive au même résultat par une voie beaucoup plus simple. Si nous différentions la première équation et si nous éliminons ensuite $\frac{dz}{dx}$ et z, nous aurons

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2y}{dx^2} + \left(P_1 - \frac{Q'_1}{Q_1} + Q_2\right)\frac{dy}{dx} \\ &\quad + \left(P'_1 + P_1 Q_2 - P_2 Q_1 - P_1 \frac{Q'_1}{Q_1}\right) y = V, \end{aligned}\right.$$

où

$$V = v'_1 + \left(Q_2 - \frac{Q'_1}{Q_1}\right) v_1 - Q_1 v_2.$$

Or on intégrera cette équation si on peut la réduire à la forme

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx} + X_1 y\right) + X\left(\frac{dy}{dx} + X_1 y\right) = V,$$

c'est-à-dire

$$(2) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + (X + X_1)\frac{dy}{dx} + (XX_1 + X'_1)y = V.$$

L'intégrale générale sera

$$y = e^{-\int X_1 dx}\left[A + \int e^{\int (X_1 - X)dx}\left(B + \int V e^{\int X dx} dx\right)dx\right].$$

La question est donc réduite à déterminer les fonctions X et X_1 par les équations

$$X + X_1 = P_1 - \frac{Q'_1}{Q_1} + Q_2,$$
$$XX_1 + X'_1 = P'_1 + P_1 Q_2 - P_2 Q_1 - P_1 \frac{Q'_1}{Q_1}.$$

Posons

$$X = Q_2 - \frac{Q'_1}{Q_1} + Z,$$
$$X_1 = P_1 - Z;$$

la première est satisfaite et la seconde donne, pour trouver Z,

$$Z' + \left(Q_2 - P_1 - \frac{Q'_1}{Q_1}\right)Z + Z^2 = P_2 Q_1,$$

laquelle sera vérifiée si l'on a, en même temps,

$$Z^2 = P_2 Q_1 \quad \text{et} \quad \frac{Z'}{Z} = P_1 - Q_2 + \frac{Q'_1}{Q_1}.$$

En éliminant Z, on obtient

$$P_1 - Q_2 = \frac{1}{2}\frac{P'_2}{P_2} - \frac{1}{2}\frac{Q'_1}{Q_1},$$

qui est exactement la relation donnée par M. Ibach. En prenant donc

$$X = Q_2 - \frac{Q'_1}{Q_1} + \sqrt{P_2 Q_1} = P_1 - \frac{1}{2}\frac{P'_2}{P_2} - \frac{1}{2}\frac{Q'_1}{Q_1} + \sqrt{P_2 Q_1},$$
$$X_1 = P_1 - \sqrt{P_2 Q_1},$$

et en substituant dans la formule générale, on aura y et ensuite z sans nouvelle intégration.

Permettez-moi d'ajouter que presque toutes les équations différentielles linéaires du deuxième ordre qu'on a intégrées par des méthodes spéciales sont des cas particuliers de l'équation (2). Je choisirai quelques exemples.

L'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{P'}{P} + \frac{R'}{R}\right)\frac{dy}{dx} - \left[\left(\frac{P'}{P}\right)' - \frac{P'}{P}\frac{R'}{R} + a^2\frac{R^2}{P^2}\right]y = 0,$$

intégrée par Euler (*Calc. intégr.*, t. II, p. 116) d'après la connaissance d'un facteur intégrant, rentre dans l'équation (2), si l'on fait

$$X = -\frac{R'}{R} - a\frac{R}{P},$$
$$X_1 = -\frac{P'}{P} + a\frac{R}{P}.$$

Une équation considérée par Petzval et dont M. Spitzer a tiré des résultats particuliers (*Archives de Grunert*, t. LX)

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \left(\varphi_2 + \varphi_1 + \frac{\varphi'_2 - \varphi'_1}{\varphi_2 - \varphi_1}\right)\frac{dy}{dx} + \left(\varphi_1\varphi_2 + \frac{\varphi_1\varphi'_2 - \varphi_2\varphi'_1}{\varphi_2 - \varphi_1}\right)y = 0$$

se déduit aussi de l'équation (2) en posant

$$X = -\varphi_2 - \frac{\varphi'_2 - \varphi'_1}{\varphi_2 - \varphi_1},$$
$$X_1 = -\varphi_1.$$

On obtient l'équation de M. Burnside (*Miller mathematical Questions*, t. XI)

$$2f(x)\frac{d^2y}{dx^2} + 3f'(x)\frac{dy}{dx} + [f''(x) \pm n^2]y = 0,$$

en prenant

$$X = \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{\theta}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{f(x)}},$$

$$X_1 = \frac{1}{2} \frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{\theta}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{f(x)}},$$

et en mettant $\theta = n\sqrt{-1}$ ou $\theta = n$, selon que l'on a dans l'équation le signe supérieur ou inférieur.

M. Cockle (*Miller mathematical Questions*, t. IX) a intégré l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{R'}{2R} + a\sqrt{R}\right)\frac{dy}{dx} + Ry = 0;$$

ici il faut poser

$$X = -\frac{R'}{2R} - (a+c)\sqrt{R},$$

$$X_1 = c\sqrt{R},$$

et déterminer c par l'équation

$$c(a+c) + 1 = 0.$$

Aussi l'équation proposée et intégrée par M. Malet (*Mathematical Questions*, t. XXIII),

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + \left[\frac{P^2 - R^2}{4} + \frac{1}{2}(P' - R')\right]y = 0,$$

rentre dans l'équation (2), en mettant

$$X = \tfrac{1}{2}P + \tfrac{1}{2}R,$$

$$X_1 = \tfrac{1}{2}P - \tfrac{1}{2}R.$$

Si l'on veut y faire rentrer l'équation considérée par M. Malmsten (*Dublin and Cambridge mathem. Journ.*, t. III, *Journal de Crelle*, t. 39, et Brioschi, *Annali di Scienze matematiche e fisiche*, t. II),

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{r}{x}\frac{dy}{dx} - \left(bx^m + \frac{s}{x^2}\right)y = 0,$$

on mettra

$$X = \frac{1}{2}\frac{r}{x} - z,$$

$$X_1 = \frac{1}{2}\frac{r}{x} + z,$$

et l'on aura, pour déterminer z, l'équation

$$4x^2\frac{dz}{dx} - 4x^2z^2 = -4bx^{m+2} - (r^2 - 2r + 4s).$$

Si l'on fait

$$z = \frac{v+k}{x},$$

où k est donné par l'équation

$$(2k+1)^2 = (r-1)^2 + 4s,$$

on réduit la précédente à

$$x\frac{dv}{dx} - (2k+1)v - v^2 = -bx^{m+2}.$$

Maintenant on sait (Boole, *Differential equations*, p. 95) que l'équation

$$x\frac{dy}{dx} - ay + cy^2 = ex^n$$

est intégrable par des quadratures indéfinies toutes les fois que $\frac{n \pm 2a}{2n}$ est un nombre entier positif q; donc, dans notre cas, on aura la condition

$$\frac{m+2 \pm (2k+1)}{2(m+2)} = q,$$

c'est-à-dire

$$m+2 = \pm\frac{2(2k+1)}{2q-1},$$

et, en substituant pour $2k+1$ sa valeur,

$$m+2 = \pm\frac{2\sqrt{(r-1)^2+4s}}{2q-1},$$

qui est la condition posée par M. Malmsten.

(16 mai 1884.)

REMARQUES SUR LA MÊME NOTE DE M. IBACH;

Par M. J. JUHEL-RÉNOY, à Bordeaux.

Le dernier numéro des *Nouvelles Annales* contient une Note sur l'intégration des équations simultanées

$$\frac{dy}{dx} + P_1 y + Q_1 z = v_1,$$

$$\frac{dz}{dx} + P_2 y + Q_2 z = v_2.$$

L'auteur de cette Note, M. Ibach, démontre que le système est intégrable dans le cas où la relation

$$\sqrt{\frac{P_2}{Q_1}} = e^{\int (P_1 - Q_2)\, dx}$$

est vérifiée. Le calcul est assez long; on arrive plus facilement au résultat par l'application de la méthode de d'Alembert.

Soit, en effet, l'équation

$$P_2 u^2 + (P_1 - Q_2)\, u - Q_1 + \frac{du}{dx} = 0,$$

de laquelle dépend l'intégration du système proposé. Cette équation sera évidemment intégrable, si les équations

$$P_2 u^2 - Q_1 = 0 \quad \text{et} \quad (P_1 - Q_2)\, u + \frac{du}{dx} = 0$$

sont compatibles, ce qui exige que

$$\frac{\sqrt{P_2}}{\sqrt{Q_1}} = e^{\int (P_1 - Q_2)\, dx}.$$

On retrouve ainsi le théorème énoncé par M. Ibach.

Un second cas d'intégrabilité se présente tout aussi simplement. En effet, le système proposé sera intégrable, si la valeur de u satisfait aux deux équations

$$P_2 u + (P_1 - Q_2) = 0 \quad \text{et} \quad du = Q_1\, dx,$$

ce qui entraîne la condition

$$P_2 \int Q_1\, dx = Q_2 - P_1.$$

(20 mai 1884.)

REMARQUES SUR LA MÊME NOTE DE M. IBACH;

PAR M. E. CATALAN.

I. L'auteur considère les équations

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} + P_1 y + Q_1 z = V_1, \quad \frac{dz}{dx} + P_2 y + Q_2 z = V_2.$$

Il dit : « La méthode de d'Alembert conduit à démontrer que la résolution d'un pareil système dépend de l'intégration d'une équation différentielle de la forme

$$(2) \qquad \frac{du}{dx} + Au + Bu^2 = C,$$

dans laquelle A, B, C sont des fonctions de x. Or *Euler a prouvé que l'on ne peut intégrer cette dernière équation que si l'on en connaît* A PRIORI *une solution particulière...* »

Où Euler a-t-il énoncé une pareille proposition [1]?

---

[1] La phrase de M. Ibach doit être rectifiée de la manière suivante : « Euler a prouvé que l'on peut intégrer cette dernière équation si l'on en connaît *a priori* une solution particulière; en thèse générale, le problème est donc insoluble. » Ch. B.

Si l'on procédait par analogie, on conclurait que :

Pour résoudre l'équation $f(x) = 0$, on doit en connaître une racine.

Du reste, l'équation (2), immédiatement intégrable quand elle se réduit à

$$(3) \qquad \frac{du}{dx} = X(a + bu + cu^2),$$

comprend, comme cas particulier, l'équation de Riccati. La proposition dont il s'agit semble donc inexacte.

II. La méthode proposée par M. Ibach est une extension, fort compliquée, de celle que l'on doit à d'Alembert. Le procédé suivant, bien connu, est beaucoup plus simple.

De la première des équations données, on déduit

$$(4) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + P_1 \frac{dy}{dx} + P'_1 y + Q_1 \frac{dz}{dx} + Q'_1 z = V'_1.$$

Éliminant z et $\frac{dz}{dx}$, on trouve l'équation *linéaire*

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^2y}{dx^2} + \left(P_1 + Q_2 - \frac{Q'_1}{Q_1}\right) \frac{dy}{dx} \\ &\quad + \left(P'_1 - Q_1 P_2 + Q_2 P_1 - \frac{Q'_1}{Q_1} P_1\right) y \\ &= V'_1 - Q_1 V_2 + Q_2 V_1 - \frac{Q'_1}{Q_1} V_1; \end{aligned} \right.$$

ou, pour abréger,

$$(6) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + G \frac{dy}{dx} + Hy = K.$$

Cette équation (6) donne lieu aux remarques suivantes :

1° Elle est intégrable, en premier lieu, quand les coefficients P_1, Q_1, P_2, Q_2 se réduisent à des constantes.

2° Si le coefficient G est nul, et que l'on fasse abstraction du second membre, elle devient

$$\frac{d^2y}{dx^2} + Xy = 0. \tag{7}$$

Celle-ci a été étudiée, tout particulièrement, par Liouville.

3° La condition $G = 0$, ou

$$\frac{Q'_1}{Q_1} = P_1 + Q_2,$$

est vérifiée si l'on prend

$$Q_1 = e^{\int (P_1 + Q_2)\,dx} \text{ (1)}, \tag{8}$$

valeur d'où résulte

$$H = P'_1 - Q_1 P_2 - P_1^2. \tag{9}$$

4° Si, de plus,

$$P_2 = \frac{P'_1 - P_1^2}{Q_1} = (P'_1 - P_1^2)\,e^{-\int (P_1 + Q_2)\,dx}, \tag{10}$$

l'équation (6), devenant

$$\frac{d^2y}{dx^2} = K,$$

a pour intégrale

$$y = C + C_1 x + \int dx \int K\,dx.$$

Etc.

III. M. Ibach applique sa méthode aux équations (2)

$$\frac{dy}{dx} + xy + x^2 z = 0,$$

$$\frac{dz}{dx} + a^2 x^2 y + xz = 0.$$

---

(1) Cette formule (8) a une grande analogie avec la relation (A) de M. Ibach.

(2) Page 179.

Il trouve

$$y = \frac{Ce^{\log x - \frac{x^2}{2} - \frac{ax^3}{3}} + C'e^{\log x - \frac{x^2}{2} + \frac{ax^3}{3}}}{2ax},$$

$$z = \frac{Ce^{\log x - \frac{x^2}{2} - \frac{ax^3}{3}} - C'e^{\log x - \frac{x^2}{2} + \frac{ax^3}{3}}}{2ax};$$

mais ces valeurs sont *inexactes* ([1]).

A cause de $e^{\log x} = x$, on peut les écrire ainsi :

$$y = Ae^{-\frac{x^2}{2} - a\frac{x^3}{3}} + Be^{-\frac{x^2}{2} + a\frac{x^3}{3}},$$

$$z = Ae^{-\frac{x^2}{2} - a\frac{x^3}{3}} - Be^{-\frac{x^2}{2} + a\frac{x^3}{3}}.$$

Par conséquent,

$$L(y + z) = L(2A) - \left(\frac{x^2}{2} + a\frac{x^3}{3}\right),$$

$$L(y - z) = L(2B) - \left(\frac{x^2}{2} - a\frac{x^3}{3}\right);$$

$$dy + dz = -(y + z)(x + ax^2)\,dx,$$

$$dy - dz = -(y - z)(x - ax^2)\,dx;$$

$$\frac{dy}{dx} = -xy - ax^2 z, \quad \frac{dz}{dx} = -xz - ax^2 y;$$

ou

$$\frac{dy}{dx} + xy + ax^2 z = 0, \quad \frac{dz}{dx} + ax^2 y + xz = 0.$$

Ce sont donc là les équations différentielles qui doivent être substituées aux premières.

IV. Comme troisième application, l'auteur a pris le

([1]) L'erreur provient de ce que M. Ibach dit, 2e ligne de la p. 179, que, si $P_1 = Q_2$, P_2 et Q_1 doivent être dans un rapport constant, ce qui est une inadvertance manifeste, car on conclut de la condition

$$\sqrt{\frac{P_2}{Q_1}} = e^{\int (P_1 - Q_2)\,dx}$$

que P_2 et Q_1 doivent être égaux. Ch. B.

système

$$\frac{dy}{dx} + \frac{e^x + 1}{x} y + z = 0, \quad \frac{dz}{dx} + x^2 y + \frac{e^x}{x} z = 0$$ ([1]).

Il en déduit :

$$2xy = Ce^{-u} + C'e^{-v}, \quad 2xz = Ce^{-u} - C'e^{-v},$$

en supposant

$$u = \int \frac{e^x + x^2}{x} dx, \quad v = \int \frac{e^x - x^2}{x} dx.$$

Ces intégrales ne sont pas plus exactes que les premières ([2]). En effet, comme on peut aisément le vérifier, elles conduisent aux équations

$$\frac{dy}{dx} + \frac{e^x + 1}{x} y + zx = 0, \quad \frac{dz}{dx} + \frac{e^x + 1}{x} z + yx = 0.$$

Ces résultats erronés sont-ils fortuits? Proviennent-ils de la méthode imaginée par M. Ibach? Ce sont des questions que je n'ai pas le loisir de résoudre.

V. Comme suite à ces *Remarques*, j'indiquerai certains cas, très simples, dans lesquels l'équation

$$(11) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = 0$$

est intégrable.

Supposons d'abord qu'elle ait la forme

$$(12) \qquad (x-a)(x-b)y'' + (fx+g)y' + hy = 0,$$

et cherchons si

$$y_1 = (x-a)^p$$

en peut être une intégrale particulière.

([1]) Page 180.

([2]) Il y a simplement une faute d'impression au dénominateur de z, où il faut lire 2 au lieu de $2x$. Ch. B.

On trouve

$$(13)\quad p(p-1)(x-b)+p(fx+g)+h(x-a)=0,$$

équation qui se décompose en

$$p(p-1)+pf+h=0,\quad -bp(p-1)+gp-ah=0,$$

ou bien

$$(a-b)(p-1)+af+g=0,\quad p(bf+g)-(a-b)h=0;$$

puis, en supposant $a-b$ différent de zéro :

$$(14)\quad (a-b)^2h+(af+g)(bf+g)=(a-b)(bf+g),$$

$$(15)\qquad p=\frac{(a-b)h}{bf+g}.$$

Quand la *condition* (14) est remplie, la formule (15) est applicable.

Si l'on veut que

$$y_2=(x-b)^p$$

soit une seconde intégrale particulière, la relation (14) ne doit pas être altérée quand on y permute a et b. Donc

$$bf+g=-(af+g),$$

ou

$$(16)\qquad g=-\tfrac{1}{2}(a+b)f;$$

et, par conséquent,

$$(17)\qquad p=-2\frac{h}{f}=1-\frac{f}{2}.$$

L'intégrale générale de l'équation

$$(18)\ (x-a)(x-b)y''+f\left(x-\frac{a+b}{2}\right)y'-\frac{f}{2}\left(1-\frac{f}{2}\right)y=0$$

est donc

(19) $$y = A(x-a)^{1-\frac{f}{2}} + B(x-b)^{1-\frac{f}{2}} \text{ (1)}.$$

Application. — Soit l'équation

$$(x^2 - \tfrac{3}{2}x + \tfrac{1}{2})y'' + (\tfrac{8}{3}x - 2)y' + \tfrac{4}{9}y = 0 \text{ (2)},$$

dans laquelle $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$. On trouve $f = \frac{8}{3}$. Donc l'intégrale demandée est

$$y = A(x-1)^{-\frac{1}{3}} + B(x-\tfrac{1}{2})^{-\frac{1}{3}}.$$

Autre application.

$$x^2y'' + xy' + y = 0.$$

On obtient

$$y = Ax^{\sqrt{-1}} + Bx^{-\sqrt{-1}};$$

puis, par une transformation évidente,

$$y = C\sin(Lx) + D\cos(Lx).$$

VI. Dans l'équation (12), posons

(20) $$y = e^{\int u\,dx}.$$

Elle devient, comme l'on sait (3),

(21) $$u^2 + u' + Pu + Q = 0.$$

Essayons dans quels cas u peut être un *polynôme entier;* par exemple, $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$.

La substitution donne

$$-Q = (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)^2 + 2\alpha x + \beta + P(\alpha x^2 + \beta x + \gamma).$$

---

(1) Dans le cas où les facteurs $x - a$, $x - b$ deviennent égaux, cette formule doit être remplacée par celle-ci :

$$y = (x-a)^{-\frac{f}{2}}(Cx + D).$$

(2) Intégrée par M. Désiré André (*Journal de Resal*, p. 287 ; 1881). La Note de cet ingénieux géomètre a été l'occasion du petit problème que nous venons de résoudre.

(3) Voir ci-dessus, équation (2).

Donc, prenant *arbitrairement* P, on a la valeur correspondante de Q. Si, par exemple, P est un polynôme du deuxième degré, Q sera un polynôme du quatrième degré. Voilà donc une infinité de cas dans lesquels *l'équation* (11) *admet une intégrale de forme donnée* (¹).

P.-S. — Les valeurs de y et de z, relatives à l'*application II* (p. 180), sont inexactes.

22 mai 1884.

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME DE GÉOMÉTRIE;

PAR M. G. TARRY,

Contrôleur des contributions diverses à Alger.

Il est bien connu que la polaire réciproque d'une conique est une autre conique; il l'est moins que *deux coniques quelconques sont polaires réciproques*. En voici la démonstration :

On sait que, dans le plan de deux coniques quelconques, il existe un triangle et un seul conjugué commun de ces deux coniques et que ce triangle a pour sommets les points de rencontre des couples de côtés opposés du quadrangle des points d'intersection de ces coniques, et pour côtés les droites qui joignent les couples des sommets opposés du quadrilatère de leurs tangentes communes.

(¹) Cette remarque a le défaut d'être *trop simple*. Néanmoins, je ne la crois pas inutile. Si l'on pouvait former un *catalogue* renfermant un grand nombre d'*équations intégrées*, il en résulterait certainement, dans la théorie des équations différentielles, de nouveaux progrès.

De ces propriétés, on déduit immédiatement les lemmes suivants :

LEMME I. — *Dans la figure polaire réciproque de l'ensemble de deux coniques et de leur triangle conjugué commun, ce triangle se transforme en un autre qui est conjugué commun des coniques polaires réciproques des premières.*

LEMME II. — *Si deux coniques sont polaires réciproques par rapport à une conique directrice, le triangle conjugué commun de ces deux coniques sera un triangle conjugué de la conique directrice.*

Considérons maintenant deux coniques quelconques S et Σ et leur triangle conjugué commun ABC.

Désignons par P et Q l'un des points d'intersection de la droite BC et de la droite CA avec la conique S, et par p et q l'une des tangentes menées des sommets opposés A et B à la conique Σ.

D'après le lemme II, si les deux coniques S et Σ sont polaires réciproques, le triangle ABC sera conjugué de leur conique directrice, de plus P et p, ainsi que Q et q, seront pôle et polaire réciproques, et, par suite, le point de rencontre O des tangentes p et q sera le pôle de la droite PQ par rapport à la conique directrice.

Le point O et la droite PQ ont des positions quelconques relativement au triangle ABC, par conséquent, d'après un théorème connu, il existe une conique et une seule par rapport à laquelle le triangle ABC est conjugué, et le point O est le pôle de la droite PQ.

Appelons D cette conique.

Je dis que les coniques S et Σ sont polaires réciproques par rapport à la conique directrice D.

Soit S′ la conique lieu des pôles, par rapport à la conique directrice D, de toutes les tangentes à la conique Σ.

Les tangentes p et q de la conique Σ passant respectivement par les couples de points A, O et B, O ont pour pôles P et Q.

Par conséquent, la conique S′ passe par les points P et Q, situés sur les côtés du triangle ABC qui lui est conjugué.

De même, la conique S passe par les points P et Q et a pour triangle conjugué ABC.

Or, on sait qu'il n'existe qu'une conique satisfaisant à ces conditions; donc la conique S′ n'est autre que la conique S, ce qui démontre le théorème.

Il résulte de là que :

Une conique est à elle-même sa polaire réciproque d'une infinité de manières.

On peut à ce corollaire ajouter le suivant :

Toutes les coniques directrices, par rapport auxquelles une conique donnée est à elle-même sa polaire réciproque, sont doublement tangentes à cette conique.

En effet, si l'on considère un des points d'intersection de la conique donnée avec une conique directrice, la polaire de ce point, tangente à la conique directrice, passe par ce point et est tangente à la conique donnée; la conique donnée et la conique directrice sont donc doublement tangentes.

Le théorème principal dont il est ici question est dû à Steiner; il est si peu répandu, qu'on n'en trouve aucune trace ni dans Poncelet, ni dans Chasles.

Le théorème général peut être appliqué surtout à l'étude des propriétés de deux coniques données. Exemple :

Si une conique est harmoniquement inscrite à une autre, cette dernière lui est harmoniquement circonscrite, et réciproquement.

Enfin, les points d'intersection de deux coniques ayant pour polaires, par rapport à une conique, leurs quatre tangentes communes, *le triangle qui a pour sommets trois des points d'intersection est homologique à un (ou à plusieurs) des triangles formés par trois tangentes communes.*

En appliquant la même méthode à l'espace, on trouve que *deux surfaces quelconques du second degré sont polaires réciproques* et qu'*une surface du deuxième degré est à elle-même sa polaire réciproque d'une infinité de manières.*

ERRATA.

Page 72, lignes 5 et 7 en remontant, *au lieu de* u_{2p+1}, *lisez* u_{2p-1}.
Page 89, ligne 14, dans le deuxième membre, *au lieu de* V_n, *lisez* V'_n.
Page 172, deux dernières lignes, ***supprimez*** ne ... que.
Page 173, ligne 6, *au lieu de* paramètres, *lisez* fonctions.
» lignes 17 et 18, *au lieu de dz, lisez dx.*
Page 177, deux dernières lignes, *au lieu de* θ_1, *lisez* θ_2.
Page 179, ligne 8, *au lieu de* constant, *lisez* l'unité.
Page 181, ligne 15, au dénominateur de z, *au lieu de* $2x$, *lisez* 2.
Page 200, ligne 1, *au lieu de* la droite DD', *lisez* la droite BB'.

CONCOURS D'AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES DE 1882.

Compositions d'admissibilité.

Mathématiques spéciales.

On donne une ellipse et un point P dans son plan :

1° Trouver le nombre des cercles osculateurs à l'el-

lipse et tels que la corde commune à l'ellipse et à chacun d'eux passe en P;

2° Trouver, pour chaque position du point P, combien de ces cercles osculateurs sont réels;

3° Montrer que les points de contact de ces cercles osculateurs et de l'ellipse sont sur un même cercle C;

4° Trouver l'enveloppe E du cercle C quand le point P décrit l'ellipse donnée;

5° La courbe E peut être regardée comme l'enveloppe d'une série de cercles qui coupent à angle droit un cercle fixe et dont les centres sont sur une conique : chercher de combien de manières la courbe E est susceptible de ce mode de génération.

Mathématiques élémentaires.

On donne une sphère et un cercle C de cette sphère; on considère les cônes passant par le cercle C et coupant la sphère suivant un second cercle C′ de grandeur constante :

1° Trouver le lieu géométrique des sommets de tous ces cônes;

2° Dans chacun de ces cônes dont le sommet est extérieur à la sphère et pour lesquels le cercle de sortie C′ ne coupe pas le cercle C, on considère les deux génératrices situées dans le plan principal perpendiculaire au plan du cercle C : déterminer l'angle de ces droites avec le plan du cercle C, connaissant le volume du tronc de cône compris entre les cercles C et C′. Variation de ce volume quand le sommet du cône se déplace sur son lieu.

Pourrait-on, en modifiant l'énoncé du problème, appliquer les formules trouvées au cas où le sommet du cône est extérieur à la sphère, la condition relative aux cercles C et C′ restant la même?

Composition sur certaines parties, désignées à l'avance, du programme de la licence ès sciences mathématiques.

Théorie. — Connaissant le mouvement relatif d'un point par rapport à un système de comparaison, ainsi que le mouvement absolu de ce système, déterminer l'accélération absolue du point.

Application. — Un trièdre trirectangle $Oxyz$ tourne avec une vitesse constante ω autour de son arête Oz, qui est verticale : un plan P, passant par Oy, et faisant avec le plan xOy un angle constant dont la tangente est $\sqrt{\frac{3}{2}}$, est entraîné avec le trièdre. Déterminer, par rapport à ce trièdre, le mouvement de deux points pesants A et B assujettis à rester, le premier sur Ox, le second dans le plan P; les deux points ont chacun une masse égale à l'unité et exercent l'un sur l'autre une attraction mesurée par le produit de leur distance par $2\omega^2$. Quelles doivent être les circonstances initiales pour que la trajectoire relative de B soit une parabole? On néglige l'influence des résistances passives et de la rotation de la Terre.

Compositions finales.

Analyse et Mécanique.

1° Calculer, en se fondant sur les propriétés des intégrales prises suivant un contour fermé, la valeur de l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{3}} \operatorname{L} x \, dx}{(x^2+4)^2},$$

dans laquelle on attribue à $\operatorname{L}x$ et à $x^{\frac{1}{3}}$ leurs valeurs réelles.

2° Un point matériel M non pesant est attiré par chacun des éléments d'une droite indéfinie XX′ avec une intensité proportionnelle à la longueur de l'élément et à l'inverse de la quatrième puissance de la distance de cet élément au point M. Déterminer une surface de révolution autour de XX′ et telle que, si le point M est assujetti à se mouvoir sur cette surface, il exercera sur elle une pression constante. On donne la position initiale du mobile, ainsi que sa vitesse initiale en grandeur et en direction.

Chercher à quelles conditions doivent satisfaire ces données pour que la surface obtenue soit une sphère ou un tore : déterminer dans ce dernier cas le mouvement du point M.

Exercice de calcul.

Calculer les trois angles d'un triangle sachant que la somme de leurs cotangentes est 1,8, et la somme des carrés de leurs tangentes 11,97.

Épure.

Dans un plan de front on donne : 1° une verticale A; 2° une droite B coupant A en un point P sous un angle de 45°; 3° un cercle C tangent à la droite B au-dessous de laquelle il est situé, et ayant son centre sur l'horizontale du point P. Si l'on fait tourner le cercle C autour de chacune des droites A et B, il engendre deux tores : on demande l'intersection de ces deux tores.

L'intersection se compose du cercle C et d'une courbe D : trouver les tangentes à D aux points où cette courbe rencontre le cercle. Tangentes perpendiculaires à la ligne de terre.

Pour distinguer les parties vues et cachées, on re-

gardera comme transparent le cône dont l'axe est la droite B.

SUJETS DES LEÇONS.

Ces sujets diffèrent très peu de ceux qui ont été traités en 1881 et 1883.

AGRÉGATION DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE SPÉCIAL.

ÉPREUVES ÉCRITES DU CONCOURS DE 1881.

Algèbre et Trigonométrie.

Calculer avec toute l'exactitude des Tables à 7 décimales la valeur de l'angle u donnée par l'équation

$$(1) \qquad u - e \sin u = m,$$

pour $m = 48°$, $e = 0,167$.

On en déduira le rayon r et l'angle v au moyen des relations

$$r = 1 - e \cos u = \frac{1 - e^2}{1 + e \cos v}.$$

Nota. — Dans le calcul de l'équation (1), u devant être exprimé en parties du rayon sera multiplié par 206265″.

Géométrie descriptive.

Si, sur les cordes d'une ellipse, menées parallèlement à une direction donnée, comme diamètres, on décrit des circonférences, l'enveloppe de celles-ci sera une ellipse. Pour démontrer cette proposition, on considérera l'ellipse donnée comme la projection oblique sur un certain plan du contour d'une sphère. On fera une épure ou croquis de la figure à main levée.

Mécanique.

Théorie du pendule simple dans le vide, pour des oscillations extrêmement petites. Applications.

ÉPREUVES ÉCRITES DU CONCOURS DE 1882.

Algèbre.

Un professeur, pour donner à ses élèves une idée succincte de la résolution des équations du troisième degré de la forme $x^3 + px + q = 0$, les engage à remplacer x par $y - \frac{m}{y}$, ou par $m \sin\varphi$, en disposant de l'indéterminée m de telle sorte que l'équation transformée soit résoluble à la manière des équations du second degré, ou de la relation trigonométrique entre $\sin 3\varphi$ et $\sin\varphi$, et donne immédiatement une racine réelle. On en déduira les trois racines de l'équation proposée.

Appliquer ce procédé aux équations

$$x^3 + 6x - 2 = 0, \quad x^3 - 6x - 2 = 0,$$

et faire le calcul avec la précision que peuvent donner les Tables à 5 décimales.

Géométrie descriptive.

Dans un plan $P\alpha P'$, perpendiculaire au plan vertical, et faisant un angle φ avec le plan horizontal, on décrit une circonférence sur la portion AB de la trace horizontale αP prise comme diamètre. Construire la surface engendrée par ce cercle tournant autour d'un axe vertical dont la projection horizontale C divise le diamètre AB en deux parties telles que $\frac{AC - CB}{AC + CB} = \sin\varphi$.

Pour représenter les projections des corps ainsi engendrés, on supposera que la partie située au-dessus de $P\alpha P'$ a été supprimée. On fera l'épure à main levée.

Mécanique.

1. Description de l'injecteur Giffard.

2. Engrenage à roues elliptiques, destiné à transmettre la rotation d'un axe à un autre axe parallèle dans un rapport qui varie entre des limites données.

Épreuves écrites du concours de 1883.

Algèbre et Trigonométrie.

Vérifier l'égalité

$$\frac{1-x^2}{1-2x\cos\alpha+x^2} = 1 + 2x\cos\alpha + 2x^2\cos^2\alpha + \ldots.$$

Employer la série pour calculer la valeur du premier membre, en faisant

$$x = 0,127, \quad \alpha = 6^\circ.$$

Combien de termes faut-il prendre pour que l'erreur commise en négligeant les termes suivants soit moindre que 0,001.

Géométrie descriptive.

Étant donné un cône à base elliptique et un point pris sur le plan de la base à l'intérieur de l'ellipse, couper ce cône par un plan suivant une courbe ayant son centre en ce point. On construira la projection de cette courbe sur le plan de la base.

Mecanique.

Expression du travail moteur nécessaire pour entretenir le mouvement d'un convoi, à une vitesse donnée, sur un chemin de fer rectiligne de pente donnée.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1882.

Composition de Mathématiques.

On donne deux cercles se coupant en A et B. Une conique quelconque passant par ces points et tangente aux deux cercles rencontre l'hyperbole équilatère qui a ces points pour sommets en C et D.

1° Démontrer que la droite CD passe par un centre de similitude des deux cercles donnés.

2° Si l'on considère toutes les coniques qui, passant par A et B, sont tangentes aux deux cercles, démontrer que le lieu de leurs centres se compose de deux circonférences de cercle E et F.

3° Soit une conique satisfaisant à la question et ayant son centre sur E ou F; démontrer que les asymptotes de la conique rencontrent cette circonférence en deux points fixes situés sur l'axe radical des deux cercles donnés.

Composition française.

Lettre d'un officier actuellement en Tunisie.

Il traitera principalement les points suivants :

Misère actuelle de la contrée.

Barbarie et fanatisme des populations.

Comparaison de l'état présent du pays avec son état ancien aux époques de la prospérité de Carthage, de la conquête romaine et de la puissance des Arabes.

Difficultés spéciales à une guerre contre des peuplades nomades.

Vertus militaires qu'une campagne semblable met en jeu chez les soldats français.

Lavis.

Faire à l'encre de Chine, et à *teintes plates,* le lavis d'un cylindre couronné par un parallélépipède rectangle portant ombre sur lui.

Le fond restera blanc. Les ombres sont à 45° suivant l'usage. On observera les filets de lumière.

Calcul trigonométrique.

Étant donnés les trois côtés d'un triangle

$$a = 23376,63,$$
$$b = 29022,66,$$
$$c = 18846,54,$$

déterminer les trois angles et calculer la surface du triangle en hectares.

Composition de Géométrie descriptive.

Intersection d'un cylindre de révolution dont l'axe est vertical et d'un tore dont l'axe est horizontal.

L'axe du cylindre se projette horizontalement en un point c situé à $0^m,65$ en avant de la ligne de terre xy. Le rayon du cercle de base est de $0^m,038$.

Le centre du tore se projette horizontalement en un point o situé à $0^m,058$ en avant de la ligne de terre, et verticalement en un point o' situé à $0^m,078$ au-dessus de la ligne de terre. La ligne de rappel oo' est à droite du point c à une distance de $0^m,044$.

La projection horizontale de l'axe du tore rencontre la ligne de terre xy en un point situé à $0^m,054$ à droite du point de rencontre de xy avec oo'.

Le rayon du cercle générateur du tore est de $0^m,022$ et la distance de son centre à l'axe est de $0^m,051$.

On demande :

De représenter ce qui reste du tore entaillé par le cylindre; de tracer les parties vues et les parties cachées des contours apparents; de développer sur la droite de l'épure la portion de surface cylindrique qui limite le corps;

D'indiquer à l'encre rouge ou bleue les constructions nécessaires pour déterminer : *un* point de l'intersection et la *tangente* en ce point; *un* point du développement de la courbe d'intersection tracée sur la surface du cylindre, et la *tangente* au développement en ce point; *un* point du contour apparent vertical du tore et la *tangente* en ce point.

Les tangentes seront tracées à l'encre rouge ou bleue.

On prendra la ligne de terre xy parallèle aux grands côtés de la feuille, à $0^m,130$ du bord inférieur.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1882 (1).

Composition de Mathématiques.

On donne une parabole. D'un point M, on peut mener trois normales à la courbe MA, MB, MC. Trouver le lieu des points M pour lesquels

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 = \text{const.}$$

Composition de Géométrie descriptive.

Intersection de deux cylindres.

Le premier cylindre a ses génératrices horizontales et a pour base, sur le plan vertical, un cercle de 36^{mm} de

(1) Questions données à un élève qui n'a pu composer que plus tard.

rayon. Le centre de ce cercle, situé à gauche, est à 46^{mm} au-dessus de la ligne de terre.

Le second cylindre a ses génératrices de front et a pour base, sur le plan horizontal, un cercle de 36^{mm} de rayon. Le centre de ce cercle, situé à droite, est à 49^{mm} en avant de la ligne de terre:

Les lignes de rappel des centres des deux cercles sont à 142^{mm} l'une de l'autre.

La projection horizontale des génératrices du premier cylindre est parallèle, sur l'épure, à la projection verticale des génératrices du second, et fait avec la ligne de terre un angle de 45°, disposé de telle sorte que les cylindres se coupent.

On demande de représenter le solide commun aux deux cylindres.

On développera les deux surfaces cylindriques qui limitent le solide commun, en indiquant à l'encre rouge ou bleue les constructions nécessaires pour placer, sur l'un des développements, un point et la tangente en ce point.

Prendre la ligne de terre parallèle aux petits côtés de la feuille et à la partie supérieure : réserver la partie inférieure pour les deux développements.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1883.

Composition de Mathématiques.

On donne une parabole et une droite. Trouver le lieu des points tels que les tangentes menées de chacun d'eux à la parabole forment avec la droite donnée un triangle de surface donnée.

Composition française.

Quand on travaille sur les grandes matières, a dit Montesquieu, il ne suffit pas de consulter son zèle, il faut encore consulter des lumières, et si le ciel ne vous a pas accordé de grands talents, on peut y suppléer par la défiance de soi-même, l'exactitude, le travail et les réflexions.

On appréciera et on discutera cette pensée. On en fera valoir tous les termes et on recherchera quelle en est la portée pratique.

Lavis.

Faire à l'encre de Chine, *à teintes plates,* le lavis d'une sphère (dépolie ou mi-polie, à volonté) se détachant sur un fond gris dégradé de haut en bas.

La sphère sera éclairée par le rayon ordinaire à 45°.

Calcul trigonométrique.

Dans un triangle ABC, on donne

$$b = 5825^{m},755,$$
$$c = 4753^{m},826,$$
$$A = 75^{\circ}35'25'';$$

calculer a, B, C et la surface.

Composition de Géométrie descriptive.

On donne un tétraèdre régulier ABCD dont le côté est de $0^{m},12$. La face ABC est horizontale et le sommet D est au-dessous du plan ABC.

Soit P le cône qui a pour sommet le point A et pour base le cercle inscrit au triangle BCD.

Soit Q le cylindre de révolution qui a pour axe la

droite BC et pour rayon $0^m,05$. On demande la projection horizontale du solide formé par ce qui reste du tétraèdre, lorsqu'on a supprimé la partie du tétraèdre qui est comprise dans le cône P ainsi que la partie comprise dans le cylindre Q.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE EN 1882.

Composition de Mathématiques.

Soit un point fixe donné P ayant pour coordonnées a et b par rapport à deux axes rectangulaires OX, OY, et soient A et B les pieds des perpendiculaires abaissées du point P sur ces deux axes. On considère les courbes du second ordre tangentes aux deux axes en ces points A et B; du point P on mène à chacune de ces courbes deux normales variables PM, PM'.

1° Déterminer l'équation de la droite MM' qui joint les pieds des normales variables, et démontrer que cette droite passe pas un point fixe.

2° Déterminer l'équation de la courbe C lieu des points M et M'. Construire la courbe C, dans l'hypothèse $a = 2b$, au moyen de coordonnées polaires ayant le point O pour pôle.

Composition de Physique.

I. On a un miroir sphérique formé par un ménisque en verre dont on a étamé ou argenté l'une des faces. Les rayons réfléchis par cette face doivent traverser deux fois la face antérieure, qui est nue, d'abord en entrant, puis en sortant. Quel doit être le rapport des

rayons de courbure de ces deux surfaces du ménisque pour que ce système fasse l'effet d'un miroir plan? On examinera les différents cas qui peuvent se présenter. On donnera l'expression du rapport cherché dans le cas général, en désignant par n l'indice du verre; on supposera ensuite $n = \frac{3}{2}$.

Comme d'habitude, on ne considère que les rayons centraux, et l'on néglige l'épaisseur du verre.

II. Pour déterminer la valeur du kilogramme, on a mesuré exactement le volume d'un cylindre et l'on a cherché la perte de poids qu'il éprouve quand on le plonge dans l'eau. Soit V le volume du cylindre en décimètres cubes et à zéro, et soit P sa perte de poids dans l'eau, mesurée nécessairement en unités arbitraires puisque les poids métriques n'étaient pas encore connus. On demande d'établir l'équation exacte de la pesée et d'en déduire la détermination du kilogramme.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE EN 1883.

Composition de Mathématiques.

On donne la cissoïde qui, rapportée à des axes de coordonnées rectangulaires, a pour équation

$$(x^2+y^2)x = ay^2.$$

Soient x', y' les coordonnées d'un point M du plan. On propose de former : 1° l'équation du troisième degré qui a pour racines les coefficients angulaires des droites qui joignent l'origine aux points de contact des trois tangentes à la cissoïde issues du point M; 2° l'équation du cercle qui passe par ces points de contact.

Montrer que, si les trois tangentes sont réelles, le point M est intérieur au cercle.

On considère l'ensemble des cercles (C_m) dont chacun jouit de cette propriété que les tangentes à la cissoïde en trois des quatre points où il la rencontre concourent en un même point; soit M ce point de concours pour le cercle C_m.

On demande le lieu des centres des cercles C_m qui passent par un point donné P du plan, ainsi que le lieu des points M relatifs à ces cercles. On examinera en particulier le cas où le point P est situé sur la cissoïde et ne fait pas partie des trois points communs au cercle C_m et à la cissoïde pour lesquels les tangentes concourent.

Combien passe-t-il de cercles C_m par deux points donnés P, Q du plan?

Peut-on disposer de ces deux points de façon qu'ils appartiennent à une infinité de cercles C_m?

Composition de Physique.

I. Théorie du baromètre-balance. Le tube barométrique est attaché par le haut au fléau d'une balance. On supposera que la section du tube est égale à 1^{cq}; celle de la chambre barométrique est plus grande : on la désignera par a. Le bas du tube est mastiqué ou soudé à un manchon, soit en bois, soit en fonte, dont la section est b. Ce manchon avec le bas du tube plonge dans le mercure de la cuvette dont la section est c. On établira l'équation d'équilibre et la condition de sensibilité, c'est-à-dire la variation de poids correspondant à une variation de 1^{mm} dans la colonne barométrique.

II. Un cube de verre d'indice n repose sur une planchette horizontale noircie. Sur sa base inférieure, on a déposé une goutte de suif, et l'on regarde cette goutte

par la face verticale du cube, opposée à celle qui est tournée vers la lumière. En partant de la verticale et inclinant lentement le rayon visuel vers l'horizon, on voit tout d'un coup la goutte qui devient très brillante. On mesure alors l'angle du rayon visuel avec la verticale : soit α cet angle. On demande x l'indice de réfraction du suif.

Exemple : soit $n = 1,55$, $\alpha = 65°$, $\sin^2\alpha = 0,8236$, trouver x.

III. Quelle est la température maximum que l'on peut produire par la combustion de l'hydrogène, en supposant que toute la chaleur produite soit employée à échauffer les produits de la combustion?

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE

(PREMIÈRE SESSION, JUILLET 1883).

Géométrie analytique.

On donne deux axes Ox, Oy, un point A sur Ox, un point B sur Oy :

1° Former l'équation générale des paraboles telles que, pour chacune d'elles, Oy soit la corde des contacts des tangentes menées du point A, et Ox la corde des contacts des tangentes menées du point B.

2° Trouver le lieu des points de rencontre de chacune des paraboles avec celui de ses diamètres qui passe par un point H donné sur Oy.

On déterminera un nombre de conditions géométriques suffisant pour pouvoir tracer le lieu, et l'on cherchera comment doit être placé le point H, pour que ce lieu se réduise à des droites.

3° Déterminer le paramètre variable que renferme l'équation générale du 1°, de façon qu'elle représente une parabole passant par un point donné P, et chercher dans quelles régions du plan doit se trouver le point P, pour que le problème soit possible.

Calcul trigonométrique.

Résoudre un triangle, connaissant deux côtés et l'angle compris, savoir :

$$a = 4326^{\text{m}},829,$$
$$b = 7843^{\text{m}},435,$$
$$C = 123^\circ\, 7'\, 43'',2.$$

Calculer A, B, c et l'aire du triangle.

Physique.

Un thermomètre renferme à 0°, jusqu'au point A, un poids P de mercure et un cylindre B en fer, de poids P'; cet appareil étant porté dans une enceinte de température x, inconnue, le liquide s'élève jusqu'au point C. La tige a été divisée préalablement, au-dessus du point A, en parties d'égale capacité v, jaugées à 0°; l'intervalle AC comprend n de ces divisions.

D et D' sont les densités à 0° du mercure et du fer.

f et k sont les coefficients de dilatation cubique du fer et du verre; m est le coefficient de dilatation cubique absolue du mercure.

Quelle est la température X de l'enceinte ?

Exemple numérique :

	Mercure.	Fer.
$n = 266$,	$P = 197^{\text{gr}},1$,	$P' = 180^{\text{gr}},2$,
$v = 0^{\text{cc}},0013$,	$D = 13,59$,	$D' = 7,8$,
$k = 0,000025$,	$m = 0,00018$,	$f = 0,000035$.

Chimie.

1° Indiquer sommairement les préparations usuelles du chlore dans les laboratoires et dans l'industrie, et donner les formules qui les représentent.

2° Calculer le volume du chlore (mesuré à la température 0° et à la pression de $0^m,760$ de mercure) nécessaire pour transformer en acide sulfurique, en présence de l'eau, 10 litres d'acide sulfureux (mesuré à la température de 0° et à la pression de $0^m,760$ de mercure).

	Équivalents		
	en poids.	en volume.	Densités.
Cl.............	35,5	2	2,46
SO^2...........	32	2	2,22

Poids de 1^{lit} d'air : $1^{gr},293$ mesuré à la température de 0° et sous la pression de $0^m,760$ de mercure.

Géométrie descriptive.

Hyperboloïde de révolution à une nappe, entaillé par quatre cônes.

L'hyperboloïde a son axe (z, z') vertical à $0^m,110$ du plan vertical et au milieu de la feuille; sa trace horizontale Θ touche la ligne de terre; la cote de son centre est $0^m,103$ et ses génératrices rectilignes font un angle de 45° avec le plan horizontal. Les quatre cônes sont parallèles au cône asymptote de l'hyperboloïde; leurs sommets, projetés horizontalement aux extrémités (s_1, s_2, s_3, s_4) de deux diamètres du cercle Θ respectivement parallèle et perpendiculaire à la ligne de terre, ont pour cote commune $0^m,80$.

On demande de construire les projections du corps constitué par la partie de l'hyperboloïde, supposé plein et opaque, qui, placée à l'extérieur des quatre cônes, se

trouve comprise entre le plan horizontal de projection et le plan bissecteur du dièdre antérieur supérieur.

On indiquera, à l'encre rouge, les constructions employées pour obtenir un point quelconque des différentes lignes d'intersection et les tangentes en ces points. Ces constructions seront succinctement expliquées à l'aide d'une légende placée au bas de l'épure.

Titre extérieur : Géométrie descriptive.

Titre intérieur : Tronc d'hyperboloïde entaillé par des cônes.

Placer la ligne de terre parallèlement aux petits côtés du cadre, à $0^m,250$ du petit côté inférieur.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE

(SECONDE SESSION, OCTOBRE 1883).

Géométrie analytique.

On donne, dans un plan, un rectangle ABCD et un point quelconque P; par ce point, on mène une droite de direction arbitraire PR; des quatre sommets du rectangle; on abaisse des perpendiculaires AA′, BB′, CC′, DD′ sur cette droite.

Ceci posé, on demande de démontrer :

1° Que, parmi toutes les droites PR, issues du point P, il en existe une, PR′, pour laquelle la somme r^2 des carrés des distances des quatre sommets du rectangle à cette droite est maxima, et une autre, PR″, pour laquelle cette somme est minima;

2° Que les deux droites PR′ et PR″ sont rectangulaires;

3° Que le lieu des points P, pour lesquels le maxi-

mum de r^2 conserve une valeur donnée μ^2, est une conique, et que la tangente à cette conique au point P est la droite PR′; que, de même, le lieu des points P, pour lesquels le minimum de r^2 conserve une valeur donnée λ^2, est une conique, et que la tangente à cette conique au point P est la droite PR″;

4° Que ces deux coniques sont homofocales et que leurs foyers communs sont indépendants des valeurs attribuées aux deux paramètres μ^2, λ^2. Donner la position de ces foyers et examiner en particulier le cas où l'une des deux dimensions du rectangle s'annulerait.

Calcul trigonométrique.

Calculer les angles et la surface d'un triangle connaissant les trois côtés, savoir :

$$a = 4528^{\mathrm{m}},74,$$
$$b = 3254,67,$$
$$c = 3121,54.$$

Géométrie descriptive.

On donne un carré, dont le centre est à $0^{\mathrm{m}},110$ des deux plans de projection, dont les diagonales $(bd, b'd')$, $(ac, a'c')$ ont $0^{\mathrm{m}},088$ de longueur, et sont respectivement verticale et parallèle à la ligne de terre. Dans le plan de ce carré, du point (c, c') comme centre, avec un rayon égal au côté du carré, on trace un cercle; ce cercle, en tournant autour de la diagonale verticale $(bd, b'd')$, engendre un tore, et le côté $(bc, b'c')$ prolongé engendre, en tournant autour de $(ad, a'd')$, un cylindre.

On demande de représenter la partie, supposée opaque, de la *surface* du tore comprise dans le cylindre.

On indiquera, à l'encre rouge, les constructions rela-

tives à la recherche d'un point quelconque de la ligne commune au tore et au cylindre et de la tangente à cette ligne.

Ces constructions seront succinctement expliquées à l'aide d'une légende placée au bas de l'épure.

Titre extérieur : Géométrie descriptive.

Titre intérieur : Surface d'un tore comprise dans un cylindre.

Placer la ligne de terre parallèlement aux petits côtés du cadre, à $0^m,230$ du petit côté supérieur, et l'axe du tore au milieu de la feuille.

Physique.

Un récipient de volume invariable renferme de l'air sec comprimé. On laisse échapper, par un robinet, une partie du gaz; par suite de cette détente, le gaz restant se refroidit et prend la température t. On ferme alors le robinet, et l'on observe, au même moment, la pression h donnée par un manomètre qui communique avec l'intérieur du récipient. Lorsque l'air qui reste dans le récipient est revenu à la température ambiante T, on observe la pression H donnée par le manomètre. Calculer la température t.

On appliquera la formule obtenue aux données particulières suivantes :

T, température ambiante, $= 20°$;

h, pression à la fermeture du robinet, $= 0^m,800$ de mercure;

H, pression finale, $= 0^m,8587$ de mercure;

α, coefficient de dilatation de l'air, $= 0,00367$.

Chimie.

1° Préparation du phosphore à l'aide des os; sa purification; sa transformation en phosphore rouge.

2° Combien faut-il employer de litres d'oxygène sec, à la température de 15° et à la pression de $0^m,745$ de mercure, pour obtenir 50^{gr} d'acide phosphorique anhydre par la combustion du phosphore.

Équivalents en poids, du phosphore : 31; de l'oxygène : 8. Densité de l'oxygène à la température de 0° et à la pression de $0^m,760$ de mercure : 1,1056.

Coefficient de dilatation de l'oxygène : $\alpha = 0,00367$.

ÉCOLE FORESTIÈRE (CONCOURS DE 1882).

Mathématiques.

1° Trouver la somme des termes de la suite

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}.$$

2° Résoudre l'équation

$$x^5 + \frac{x^4}{2} - \frac{3x^3}{4} - \frac{3x^2}{8} + \frac{x}{16} + \frac{1}{32} = 0.$$

3° Par un point fixe A, on fait passer une série de droites rencontrant une droite donnée MN, et, sur chaque segment tel que AB, on construit un triangle semblable à un triangle donné; trouver le lieu des sommets P de ces triangles.

4° Maximum et minimum de

$$\frac{x^3 - x^2 + 3x^4 - 3x^5}{3x - 3 + x^2 - x^3}.$$

Trigonométrie et calcul logarithmique.

1° Calculer les distances des deux points C et C' à la droite passant par les deux points inaccessibles A et A',

connaissant.

$$CC' = 64989^{m},98,$$
$$ACC' = 41^{\circ}.28'.37'',42,$$
$$C'CA' = 59.49.59,87,$$
$$AC'C = 62.38.48,98,$$
$$CC'A' = 37.25.17,79.$$

2° Résoudre un triangle, et en calculer la surface, connaissant les trois angles et le rayon du cercle inscrit :

$$A = 71^{\circ}.21'.45'',36,$$
$$B = 32.43.27,92,$$
$$C = 75.54.46,72,$$
$$r = 11929^{m},98.$$

ÉCOLE FORESTIÈRE (CONCOURS DE 1883).

Mathématiques.

1° Démontrer que le carré d'un nombre premier diminué d'une unité est toujours divisible par 12 (les nombres 2 et 3 font exception).

2° Déterminer deux nombres sachant que 7 est leur somme, et 1267 la somme de leurs cinquièmes puissances.

3° Un triangle est défini par sa hauteur, son périmètre et un angle adjacent à la base; le construire et faire passer par ses trois sommets un triangle équilatéral de surface maximum ou minimum.

4° Étant donné un parallélogramme ABCD, dont les côtés AB, AC sont fixes de position, mais variables quant à leurs longueurs, de telle sorte que le sommet D décrive une droite fixe EF, trouver le lieu décrit par le point de rencontre H des hauteurs du triangle ABC.

A chaque point D de la droite EF correspond ainsi un point H du lieu; établir cette correspondance pour les différentes régions de la droite EF dans le cas général, et spécialement dans le cas où l'angle A est droit.

Trigonométrie et calcul logarithmique.

1° On donne dans un triangle

$$A = 27^{\circ}.14'.21'',56,$$
$$B = 60.45.22,42,$$
$$C = 92.\ 0.16,02,$$

et le périmètre $2p = 2330^{m},6815$; déterminer : 1° les trois côtés; 2° la surface; 3° le rayon du cercle inscrit; 4° le rayon du cercle circonscrit.

2° Les angles POA et POB étant respectivement égaux à $65^{\circ}17'34'',79$ et à $24^{\circ}35'27'',28$, calculer, en millimètres carrés, les surfaces des trois zones décrites par les arcs PB, BA et AM tournant autour du diamètre MN perpendiculaire au diamètre PQ. Le rayon PO est égal à $37^{m},389765$.

3° Déterminer les angles satisfaisant à la relation

$$2925 \sin x + 5292 \cos x = 3045.$$

ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE (CONCOURS DE 1883).

Composition de Mathématiques.

1. Une sphère de rayon r est placée sur un plan; un cône, dont le rayon de base est R et la hauteur $2r$, repose sur ce même plan. A quelle distance x du plan donné faut-il lui mener un plan parallèle, pour que les

volumes compris entre les deux plans dans ces deux solides soient équivalents? Discuter et examiner la position du plan sécant par rapport au centre de la sphère.

2. On donne un demi-cercle AOB et la tangente AC à l'extrémité A du diamètre AB. Trouver sur la demi-circonférence un point M tel que, en abaissant une perpendiculaire MC sur la tangente AC et joignant MB, on ait

$$\mathrm{MB} + 2\,\mathrm{MC} = l.$$

Discuter.

3. Trouver toutes les valeurs de x qui satisfont à l'équation

$$a \operatorname{tang} x + b \cot x = c.$$

On fera

$$a = 1,576824, \quad b = 2,765483, \quad c = 4,897431.$$

Épure.

Construire la pyramide triangulaire SABC, dont la base ABC est appliquée sur la partie antérieure du plan horizontal. Le dièdre AB vaut 69°; le sommet B est sur la ligne de terre xy, et l'arête AB est perpendiculaire à xy. On donne en millimètres :

$$\mathrm{AB} = 111, \quad \mathrm{BC} = 125, \quad \mathrm{AC} = 141, \quad \mathrm{SB} = 118, \quad \mathrm{SA} = 126.$$

Un cercle situé sur le plan vertical dans l'angle $\mathrm{B}s'c'$ est tangent aux deux côtés de cet angle et a pour rayon $0^{\mathrm{m}},036$. Ce cercle est la base d'un cylindre dont les génératrices sont perpendiculaires au plan vertical. Construire l'intersection de ce cylindre avec la pyramide. On indiquera les tracés effectués pour obtenir un point quelconque de l'intersection et la tangente en ce point.

Dans la mise à l'encre, on représentera la pyramide supposée pleine et existant seule, en supprimant la portion de ce corps comprise dans le cylindre.

ÉCOLE NAVALE (CONCOURS DE 1882).

Géométrie.

1. Diviser une droite en moyenne et extrême raison; comme application inscrire un décagone régulier dans une circonférence.

2. On donne une sphère solide et trois points A, B, C sur cette sphère. Décrire, avec le compas, un petit cercle passant par les points B, C, et faisant un angle donné avec le plan du grand cercle décrit de A comme pôle.

Statique.

On donne un polygone homogène et solide quelconque $A_1A_2A_3\ldots$; suivant les directions des côtés a_1, a_2, a_3, ... sont appliquées des forces F_1, F_2, F_3, ... qui leur sont proportionnelles. Prouver que le système se réduit à un couple, et que le moment de ce couple est proportionnel à la surface du polygone.

Arithmétique.

De combien de manières peut-on décomposer le nombre 35 280 en un produit de deux facteurs premiers entre eux? Le démontrer et généraliser.

Algèbre.

Parmi tous les triangles rectangles de même périmètre, trouver celui dont le cercle inscrit est maximum.

Géométrie descriptive.

On donne un point H dans le plan horizontal, à $0^m,04$ de la ligne de terre, et un point V dans le plan vertical,

éloigné de la ligne de terre de $0^m,06$; on donne la longueur de la droite HV de l'espace, longueur qui est de $0^m,107$. Mener par cette droite un plan faisant un angle de 50° avec le plan bissecteur du premier dièdre.

ÉCOLE NAVALE (CONCOURS DE 1883).

Géométrie.

1° Deux polyèdres symétriques sont équivalents. Ordre et démonstration succincte des propositions qui servent à établir ce théorème.

2° On donne un cercle de rayon $OC = R$, et deux points A et B sur le rayon OC, tels que $OA.OB = R^2$. Démontrer que le rapport des distances d'un point quelconque M aux deux points A et B est égal à $\frac{OA}{R}$ lorsque le point M est sur le cercle, inférieur à $\frac{OA}{R}$ lorsque le point M est à l'intérieur du cercle, et supérieur à $\frac{OA}{R}$ lorsque le point M est à l'extérieur.

Statique.

Un cercle matériel de rayon R peut tourner librement autour de son centre O, et trois points A, B, C sont donnés sur sa circonférence.

En A et B sont appliquées deux forces F_1, F_2 données en grandeur et en direction. On demande d'appliquer en C une force F_3, telle que le cercle reste en équilibre sous l'action des trois forces F_1, F_2, F_3, le point O étant fixé invariablement.

Montrer que le problème admet une infinité de solu-

tions. Trouver en grandeur et en direction la plus petite force F_3 qui réponde à la question.

Arithmétique.

Faire voir que la fraction décimale périodique mixte 0,57 864 864 864... est équivalente à la fraction ordinaire

$$\frac{5\,786\,486\,486 - 5\,786}{99\,900\,00}.$$

Algèbre.

Étant donné un tétraèdre régulier SABC, de côté a, on le coupe par un plan parallèle à la base. On prend la section A'B'C' pour base d'une pyramide dont le sommet O est au centre de gravité du triangle de base du tétraèdre. Comment doit-on mener le plan sécant pour que la pyramide ait un volume maximum? Déterminer en fonction de a l'expression de la surface totale de cette pyramide de volume maximum.

Calcul trigonométrique.

Dans le triangle rectiligne ABC, on donne

$$B = 4864^{m},25, \quad C = 2147^{m},73, \quad A = 27°47'56''.$$

Calculer A, B, C et le rayon R du cercle circonscrit.

Géométrie descriptive.

On a un point A situé dans le second dièdre, distant de $0^{m},04$ du plan horizontal et de $0^{m},03$ du plan vertical. Mener par ce point une droite faisant avec le plan horizontal un angle de 35°, et avec le plan vertical un angle de 41°. Parmi les droites qui satisfont au problème, considérer seulement celle qui a la trace verticale la plus éloignée du plan horizontal, et située sur la gauche

du plan de profil contenant A. Déterminer la plus courte distance de cette droite et de la ligne de terre.

CORRESPONDANCE.

M. Fauquembergue a énoncé et démontré, 3ᵉ série, t. II, p. 430, la proposition suivante :

Le cube d'un nombre entier autre que l'unité ne peut être la somme des carrés de deux nombres entiers consécutifs.

Voici une solution élémentaire de cette question. Il s'agit de prouver que l'équation

$$(1)\qquad X^3 = (x+1)^2 + x^2$$

n'est vérifiée, en nombres entiers, que par

$$x = 0 \quad \text{et} \quad X = 1.$$

Je pose $X = x + y$. L'équation (1) ordonnée par rapport à x devient

$$(2)\qquad x^3 + (3y-2)x^2 + (3y^2-2)x + y^3 - 1 = 0.$$

On voit sous cette forme que, x et y étant assujettis à être entiers et positifs, (2) n'est vérifiée que pour $x = 0$ et $y = 1$.

P. D.

M. Catalan fait observer que le théorème exprimé par la formule (4) de la page 67 (même Tome), ou plutôt par l'égalité

$$H(p, m) = \sum \frac{a^{p+m-1}}{f'(a)},$$

lui paraît dû. (Voir *Comptes rendus*, année 1858; *Mélanges mathématiques; Cours d'Analyse de l'Université de Liège*; etc.).

Extrait d'une lettre de M. de Saint-Germain.

Dans le numéro de novembre 1883, M. d'Ocagne a fait connaître un théorème intéressant sur les propriétés segmentaires du triangle; cette proposition, comme beaucoup de théorèmes de Géométrie plane, peut s'étendre, avec de légères modifications, aux figures sphériques, et donne lieu à l'énoncé suivant :

Soient, dans un triangle sphérique ABC, M le milieu de la base BC, X un point donné sur cette base, Y le symétrique de X par rapport à M, enfin X_1 un point pris sur BC, de telle sorte que les arcs de grand cercle AY, AX soient symétriques par rapport à l'arc bissecteur de BAC; on aura

$$\frac{\sin BX_1}{\sin CX_1} = \frac{\sin^2 AB}{\sin^2 AC}\,\frac{\sin BX}{\sin CX}.$$

Cette proposition s'établit très facilement au moyen des analogies des sinus, et ses conséquences sont évidentes.

BIBLIOGRAPHIE.

Leçons de Statique; par M. *E. Carvallo*, professeur au lycée de Troyes. In-8°. Paris, Croville-Morant; 1884. Prix : 2^{fr}.

La nouvelle méthode donnée par M. Carvallo simplifie la statique des corps solides, qu'elle permet d'enseigner en Mathématiques élémentaires plus complète, avec moins d'efforts et, en même temps, avec plus de rigueur que les Traités publiés jusqu'ici.

Au début, on trouve les notions de Géométrie analytique nécessaires pour donner les expressions algébriques des résul-

tats obtenus, toujours par la Géométrie, puis les notions préliminaires bien simplifiées.

Le Chapitre I, *Composition des forces appliquées au point matériel,* contient une partie originale dans la démonstration du parallélogramme des forces et des propriétés utiles des forces concourantes; en particulier, une nouvelle méthode de leur composition donne, comme corollaire, le théorème de Leibnitz, et fournit plus loin la composition des forces parallèles.

Le Chapitre II, *Moments des forces par rapport à un point et à un axe,* simplifie l'étude des forces appliquées à un corps solide. D'après les idées de M. Resal, le moment d'une force AF par rapport à un point O est représenté par la vitesse du point O, due à la rotation que représenterait la flèche AF, et l'on adopte la notion de moment résultant. Comme l'indique la Préface, ces considérations rendent identiques l'étude des systèmes de forces et celle des systèmes de rotations, dont on peut enrichir sans nouvel effort les connaissances des élèves.

Le Chapitre III, *Composition des forces appliquées à un corps solide,* contient la théorie des couples et des forces parallèles, comprise sans démonstration dans le Chapitre II, grâce à ce théorème nouveau :

Pour que deux systèmes de forces appliquées à un corps solide soient équivalents, il faut et il suffit *qu'ils aient même moment résultant par rapport à tout point de l'espace.*

La réduction des forces à une force et à un couple, dernier mot de la Brochure, est appliquée à quelques cas particuliers, et aux conditions d'équilibre, établies rigoureusement, d'un corps solide mobile autour d'un point, autour d'une droite, pouvant seulement glisser le long d'un axe, ou en même temps tourner aussi autour de cet axe.

Courbes et surfaces focales; par M. *A. Boset.* In-8° de 50 pages. Bruxelles, Hayez; 1884. Prix : 1fr,50.

Le travail que l'auteur publie aujourd'hui est le complément de sa *Théorie générale des circonférences focales et des foyers.* Ceux-ci ne sont que des cas particuliers des circonférences focales, de même que les directrices proprement

dites ne sont que des cas particuliers des cordes de contact des circonférences focales avec les courbes, et les plans directeurs proprement dits des plans particuliers de contact des sphères focales avec les surfaces.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

Cours de Géométrie élémentaire, à l'usage des élèves de Mathématiques élémentaires, avec des compléments destinés aux élèves de Mathématiques spéciales; par M. *Ch. Vacquant,* Inspecteur général de l'Instruction publique, ancien professeur de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis. Paris, Masson; 1884. In-8° de 678 pages. Prix : 8fr.

Essai sur le calcul infinitésimal, par M. *A.-E. Pellet.* Clermont, F. Thibaud; 1884. In-8° de 16 pages.

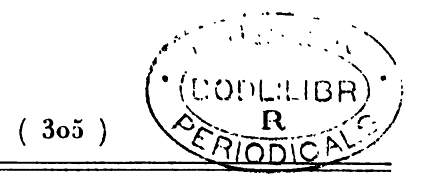
TIRAGES A PART.

Sur la théorie des imaginaires; par M. F. Gomes Teixeira, professeur à l'Université de Coïmbre. Extrait des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles,* 7e année, p. 417 à 427; 1883.

Sur une suite de moyennes; par M. J. Neuberg, chargé de Cours à l'École des Mines de Liège. Extrait des *Mémoires de la Société royale des Sciences de Liège,* 2e série, t. XI.

Sopra tre teoremi del Cesaro; Nota del prof. G.-B. Rafanelli. Extrait du *Giornale della Societa di Letture e Conversazioni scientifiche;* mai-juin 1884.

Sull'urto dei corpi e sul movimento di un corpo pesante fra due mezzi resistenti; Nota dell'ingegnere prof. Udalrigo Masoni. Extrait des *Rendiconti della R. Accademia delle Scienze fis. e mat. di Napoli,* 3e fascicule; mars 1884.



ADDITION A DEUX ARTICLES PRÉCÉDENTS (¹);

PAR M. S. RÉALIS,
Ingénieur à Turin.

1. La recherche des solutions entières de l'équation

$$ax^2 + bxy + cy^2 = h,$$

où a, b, c, h sont des entiers donnés, a été l'objet d'importantes études de la part des géomètres qui se sont occupés de l'Analyse indéterminée, parmi lesquels il nous suffira de citer ici Euler, Lagrange, Gauss, Legendre. Mais si, au point de vue théorique, la question peut être considérée comme traitée d'une manière complète, il n'en est pas ainsi au point de vue de l'application; on sait en effet que, dans la plupart des cas, les calculs exigés par les méthodes classiques deviennent très pénibles, et même impraticables. C'est ce qui donne de l'intérêt aux méthodes particulières, par où des classes plus ou moins étendues d'équations appartenant à la forme indiquée peuvent être résolues d'une manière directe, et par l'emploi de formules explicites.

Aux exemples qui font l'objet des deux articles précédents, on peut en ajouter beaucoup d'autres analogues, tels que ceux que vont nous offrir les équations (6), (7), (8), (9) ci-après, et les équations plus générales considérées aux nos 10 et 11. Mais nous allons préalablement appeler l'attention sur une particularité remarquable que présentent les relations linéaires par lesquelles on passe d'une solution à une autre, lorsque

(¹) Voir *Nouvelles Annales*, 3ᵉ série, t. II, p. 494 et 535.

les coefficients a, b, c ont entre eux une certaine dépendance; cette particularité consiste en ce que ces relations s'appliquent à la fois à plus d'une équation différente, comprise dans la forme dont il s'agit.

2. Soit proposée l'équation

$$(1) \qquad mx^2 - (m + n \pm 1)xy + ny^2 = h,$$

plus générale que celles des articles précédents, et que nous supposerons vérifiée par les valeurs entières $x = \alpha$, $y = \beta$.

L'équation (1) sera également vérifiée par les valeurs

$$(2) \qquad \begin{cases} x = (m - n)\alpha - (m - n \pm 1)\beta, \\ y = (m - n \mp 1)\alpha - (m - n)\beta, \end{cases}$$

comme il est aisé de s'en assurer par la substitution directe. Hâtons-nous de dire que ces dernières valeurs, par elles-mêmes, n'en engendrent pas d'autres, vu que, en les attribuant à α et β, l'application des formules (2) nous fait retomber sur la solution déjà connue $x = \alpha$, $y = \beta$.

La nouvelle solution, cependant, n'en est pas moins utile à connaître, vu les facilités qui en résultent dans l'application des méthodes générales de résolution; mais c'est surtout lorsqu'il s'agit de certaines classes d'équations que l'utilité des formules (2) devient manifeste, ainsi que nous allons en voir des exemples. Nous nous reportons d'ailleurs, pour différents détails propres à simplifier la question, à une Note insérée au tome VI (année 1880) de la *Nouvelle Correspondance mathématique* [1], et que nous supposons connue du lecteur.

Dans l'équation (1), m, n, h sont des entiers donnés,

---

[1] *Sur quelques questions se rattachant au problème de Pell*, n°s 5, 6, 7, 8, 9.

h n'étant pas nul. Pour que les formules (2) ne deviennent pas illusoires, on doit admettre que $m - n$ est différent de zéro, et que la solution initiale $x = \alpha$, $y = \beta$ et celle qui s'ensuit d'après ces formules ne rentrent pas l'une dans l'autre.

3. Il est digne d'attention (et c'est là la particularité annoncée plus haut) que les expressions (2) s'appliquent également à l'équation, essentiellement différente,

$$(3) \qquad (2m \mp 1)x^2 - 2(m+n)xy + (2n \mp 1)y^2 = h,$$

α, β, h satisfaisant, en ce cas, à la relation

$$(2m \mp 1)\alpha^2 - 2(m+n)\alpha\beta + (2n \mp 1)\beta^2 = h.$$

On remarquera en outre que les nombres m, n n'interviennent dans les expressions (2) que par leur différence $m - n$; cela fait que, pour des valeurs convenables de α et β, ces mêmes expressions s'appliqueront encore aux équations (1) et (3), où l'on aura augmenté ou diminué m et n d'une même valeur entière.

4. Soit fait, comme application, $m = 5$, $n = -7$, $h = 1$.

L'équation (1), en y prenant, dans l'expression du coefficient de xy, le signe inférieur, devient

$$(4) \qquad 5x^2 + 3xy - 7y^2 = 1,$$

et les formules (2) se réduisent à

$$(5) \qquad \begin{cases} x = 12\alpha - 11\beta, \\ y = 13\alpha - 12\beta, \end{cases}$$

où il n'y a pas lieu de s'appuyer sur les valeurs

$$\alpha = \beta = \pm 1.$$

L'équation (4) (traitée d'une manière différente dans

les n°s 6 et 7 de la Note citée de la *Nouvelle Correspondance*) est vérifiée par $x = \alpha = 184$, $y = \beta = -121$; elle sera donc également vérifiée, d'après les formules (5), par $x = 3539$, $y = 3844$. C'est ce qui a lieu en effet, et l'on voit facilement de quelle manière : à chaque solution obtenue par le procédé indiqué dans la Note, correspond une autre solution à obtenir à l'aide des formules (5).

5. Dans la même hypothèse de $m = 5$, $n = -7$, et en prenant les signes inférieurs dans les expressions des coefficients de x^2 et de y^2, l'équation (3) devient

$$11x^2 + 4xy - 13y^2 = h.$$

D'après la remarque ci-dessus (n° 2), si cette équation est vérifiée, pour une valeur donnée de h, par $x = \alpha$, $y = \beta$, elle l'est également par les expressions (5) qui conviennent à l'équation (4). Faisant, par exemple, $h = 23$, on a l'équation

$$11x^2 + 4xy - 13y^2 = 23,$$

dont une première et une seconde solution se présentent d'elles-mêmes, à savoir

$$\begin{cases} x = \alpha = \ \ 2, \\ y = \beta = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \alpha = \ \ 3, \\ y = \beta = -2, \end{cases}$$

et dont deux autres solutions nous seront immédiatement fournies par les valeurs

$$\begin{cases} x = 12.2 + 11.1 = 35, \\ y = 13.2 + 12.1 = 38; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 12.3 + 11.2 = 58, \\ y = 13.3 + 12.2 = 63. \end{cases}$$

Ainsi qu'on l'a dit, les formules (5) sont impuissantes à elles seules à nous mener plus loin; nous ajouterons cependant que les solutions entières de l'équation considérée, parmi lesquelles nous citerons encore les deux

suivantes :

$$\begin{cases} x = 330, \\ y = -57, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 6787, \\ y = 7374, \end{cases}$$

sont en nombre infini, et qu'elles s'obtiennent, en totalité, au moyen de formules directes. C'est sur quoi nous pourrons revenir dans un article spécial, et en généralisant la question.

6. Lorsque le coefficient de x^2 ou de y^2, dans l'une quelconque des équations (1), (3), est égal à ± 1, chaque solution se trouve généralement associée avec une autre, indépendamment des relations (2); en ce cas, le nombre des solutions distinctes à obtenir à l'aide de ces relations est illimité.

Soit, par exemple, l'équation

$$(6) \qquad x^2 - (n+2)xy + ny^2 = 1,$$

à laquelle on satisfait d'abord par $x = 1, y = 0$, puis [d'après les formules (2), où l'on aura fait $m = 1$, et pris les signes supérieurs] par $x = n - 1, y = n$.

Résolvons l'équation par rapport à x, après y avoir fait $y = n$; il nous viendra

$$x = \frac{n^2 + 2n}{2} \pm \frac{n^2 + 2}{2},$$

où le signe inférieur nous reconduit à la solution précédemment obtenue, tandis que le signe supérieur nous met en présence de la solution associée

$$\begin{cases} x = n^2 + n + 1, \\ y = n. \end{cases}$$

Au moyen de cette solution, les formules (2) produisent les nouvelles valeurs

$$\begin{cases} x = n^3 - n^2 + 2n - 1, \\ y = n^3 + 2n, \end{cases}$$

associées à leur tour avec

$$\begin{cases} x = n^4 + n^3 + 3n^2 + 2n + 1, \\ y = n^3 + 2n, \end{cases}$$

et il est manifeste que l'on peut continuer ainsi indéfiniment.

7. D'après l'observation faite plus haut (n° 3), les formules

$$\begin{cases} x = (n-1)\alpha - (n-2)\beta, \\ y = n\alpha - (n-1)\beta, \end{cases}$$

relatives à l'équation précédente, donnent également une seconde solution de l'équation

$$(7) \qquad x^2 - 2(n+1)xy + (2n-1)y^2 = 1,$$

que l'on suppose déjà vérifiée par $x = \alpha, y = \beta$.

La première solution étant $\alpha = 1$, $\beta = 0$, la seconde sera donc $x = n - 1, y = n$. Pour trouver d'autres valeurs des indéterminées, on résoudra d'abord l'équation par rapport à x, après y avoir fait $y = n$, d'où résultera la solution associée

$$\begin{cases} x = 2n^2 + n + 1, \\ y = n. \end{cases}$$

Les formules posées nous donneront ensuite le système de valeurs

$$\begin{cases} x = 2n^3 - 2n^2 + 2n - 1, \\ y = 2(n^3 + n), \end{cases}$$

associé au système

$$\begin{cases} x = 4n^4 + 2n^3 + 6n^2 + 2n + 1, \\ y = 2(n^3 + n), \end{cases}$$

que l'on pourra faire suivre, de même, d'une infinité d'autres.

8. Soit encore l'équation

(8) $$x^2 - (n+2)xy + ny^2 = -1,$$

qui n'est autre que l'équation (6), dans laquelle on a changé le signe du second membre.

La solution initiale étant ici $x = \alpha = 1$, $y = \beta = 1$, le même procédé et les mêmes formules employées pour l'équation (6) nous fourniront les solutions subséquentes. Nous trouverons ainsi

$$\begin{cases} x = n+1, \\ y = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x = n^2 - n + 1, \\ y = n^2 + 1; \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = n^3 + n^2 + 2n + 1, \\ y = n^2 + 1; \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = n^4 - n^3 + 3n^2 - 2n + 1, \\ y = n^4 + 3n^2 + 1, \end{cases}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Ces solutions, du reste, peuvent se déduire directement de celles que l'on a trouvées pour l'équation (6). Faisant, dans celle-ci,

$$n = -n', \quad x = -x', \quad y = y' - x',$$

il en résulte effectivement

$$x'^2 - (n'+2)x'y' + n'y'^2 = -1,$$

ce qui ne diffère pas de l'équation (8).

9. Considérons, comme dernier exemple, l'équation

(9) $$x^2 - 2(n+1)xy + (2n-1)y^2 = -2,$$

qui correspond à (7), où l'on a supposé le second membre $= -2$.

D'après ce qui précède, ce sont encore les formules et le procédé relatifs aux cas précédents (6), (7), (8) qui vont nous servir ici. On trouve, en effet, en partant de

la solution évidente $x=1, y=1$, que l'équation (9) admet une suite indéfinie de solutions ultérieures, les premières étant

$$\begin{cases} x = 2n+1, \\ y = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2n^2 - 2n + 1, \\ y = 2n^2+1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4n^3 + 2n^2 + 4n + 1, \\ y = 2n^2 + 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4n^4 - 4n^3 + 6n^2 - 4n + 1, \\ y = 4n^4 + 6n^2 + 1, \end{cases}$$

. . . .

10. Les développements exposés donnent le moyen de résoudre la question suivante :

Assigner, par formules directes, une infinité de solutions entières de l'équation indéterminée

$$x^2 - Axy + By^2 = 1,$$

dans laquelle A *et* B *sont des entiers donnés,* A — 2 *et* A — B — 1 *étant différents de zéro, et le rapport*

$$\frac{A-2}{A-B-1}$$

se réduisant à un nombre entier.

Nous nous bornons ici à indiquer le résultat de la solution, d'ailleurs très aisée à trouver.

Ayant fait, pour abréger, $A - B - 1 = p$, on obtiendra, à l'aide de la seule solution initiale $x_1 = 1, y_1 = 0$, et des relations linéaires

$$\begin{cases} x_{2a} = \dfrac{1}{p}[(B-1)x_{2a-1} - (2B-A)y_{2a-1}], \\ y_{2a} = \dfrac{1}{p}[(A-2)x_{2a-1} - (B-1)y_{2a-1}], \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{2a+1} = Ay_{2a} - x_{2a}, \\ y_{2a+1} = y_{2a}, \end{cases}$$

les solutions *entières* consécutives

$$\begin{cases} x_2 = \frac{1}{p}(B - 1), \\ y_2 = \frac{1}{p}(A - 2), \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = \frac{1}{p}(A^2 - 2A - B + 1), \\ y_3 = \frac{1}{p}(A - 2); \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4 = \frac{1}{p^2}(A^2B - 4AB - B^2 + 6B - 1), \\ y_4 = \frac{1}{p^2}(A^3 - 4A^2 - 2AB + 6A + 4B - 4), \end{cases}$$

que l'on pourra faire suivre d'autant d'autres que l'on voudra.

11. Il est facile de reconnaître que les relations linéaires qui viennent d'être écrites conviennent également à l'équation plus générale

$$(10) \qquad x^2 - Axy + By^2 = h,$$

A et B étant comme ci-dessus, et h (différent de zéro) correspondant à une solution initiale $x = \alpha$, $y = \beta$, que l'on suppose connue. Mais comme, en général, les valeurs de α et β ne sont pas exprimables directement par les coefficients, les valeurs ultérieures des indéterminées x, y ne le seront pas non plus, et elles se trouveront ici exprimées en fonction des quatre quantités A, B, α, β.

Dans les cas particuliers où les valeurs initiales seront des nombres constants, ou bien, déterminées en fonction explicite de A et B, ou des quantités dont ces coefficients dépendent, les valeurs successives de x et y s'exprimeront de même au moyen des coefficients, ou des quantités dont ils dépendent.

On trouvera, par exemple, que l'équation

$$x^2 - (n^2 + n + 2)xy + n^2y^2 = -(n + 1),$$

vérifiée d'abord par $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, admet en outre les

solutions

$$\begin{cases} x_1 = n^2 + n + 1, \\ y_1 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = n^3 - n + 1, \\ y_2 = n^3 + n^2 + 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = n^5 + 2n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n + 1, \\ y_3 = n^3 + \ \ n^2 + 1, \end{cases}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

dont la loi est donnée par les relations

$$\begin{cases} x_{2a-1} = (n^2 + n + 2)y_{2a-2} - x_{2a-2}, \\ y_{2a-1} = y_{2a-2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{2a} = (n-1)x_{2a-1} - (n-2)y_{2a-1}, \\ y_{2a} = nx_{2a-1} - (n-1)y_{2a-1}; \end{cases}$$

pour $a = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$.

On trouvera, de même, que l'équation

$$x^2 - (n^2 + n + 2)xy + n^2y^2 = n^2,$$

vérifiée d'abord par $x_1 = 0$, $y_1 = 1$, admet les solutions

$$\begin{cases} x_2 = n - 2, \\ y_2 = n - 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = n^3, \\ y_3 = n - 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^4 = n^4 - n^3 - n^2 + 3n - 2, \\ y^4 = n^4 - n^2 + 2n - 1, \end{cases}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

découlant des relations

$$\begin{cases} x_{2a} = (n-1)x_{2a-1} - (n-2)y_{2a-1}, \\ y_{2a} = nx_{2a-1} - (n-1)y_{2a-1}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{2a+1} = (n^2 + n + 2)y_{2a} - x_{2a}, \\ y_{2a+1} = y_{2a}, \end{cases}$$

à partir de $a = 1$.

Remarque. — Cette dernière équation étant encore vérifiée par $x'_1 = n$, $y'_1 = 0$, il s'ensuit, de la même ma-

nière, cette autre série de solutions

$$\begin{cases} x'_2 = n^2 - n, \\ y'_2 = n^2, \end{cases} \quad \begin{cases} x'_3 = n^4 + n^3 + n^2 + n, \\ y'_3 = n^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'_4 = n^5 - n^3 + 2n^2 - n, \\ y'_4 = n^5 + n^4 + 2n^2, \end{cases}$$

..................................,

qui viennent s'ajouter à celles qui précèdent.

Du reste, en faisant $x = nu$, $y = nv$, l'équation devient

$$u^2 - (n^2 + n + 2)uv + n^2v^2 = 1,$$

et l'on est ramené à la question traitée au n° 10.

12. Il importe d'observer, au sujet des équations comprises dans la classe (10), que les relations linéaires qui établissent la dépendance entre les solutions d'indice pair $2a$, et celles d'indice impair $2a-1$, ne diffèrent pas des relations signalées plus haut à l'égard des équations particulières (6), (7), (8), (9). Ces relations jouissent, en effet, de la propriété annoncée au n° 1, puisqu'elles ne sont pas déterminées par la valeur particulière des coefficients, mais seulement par celle du rapport $\frac{A-2}{A-B-1}$, lequel peut demeurer invariable pour une infinité de valeurs différentes de A et B.

NOTE SUR LES SYSTÈMES TRIPLES DE SURFACES ORTHOGONALES;

Par M. DOUCET,

Professeur au lycée Corneille, à Rouen.

Considérons trois surfaces S_1, S_2, S_3 qui se coupent orthogonalement en M, et rapportons-les à leurs plans

tangents en ce point; nous aurons, en appliquant le développement de Maclaurin, les équations

$$(S_1)\qquad x = Ay^2 + 2Byz + Cz^2 + \alpha,$$
$$(S_2)\qquad y = A'z^2 + 2B'zx + C'x^2 + \beta,$$
$$(S_3)\qquad z = A''x^2 + 2B''xy + C''y^2 + \gamma,$$

α, β, γ désignant des ensembles de termes dont le degré surpasse le second. Si l'on exprime qu'en un point M' de leur intersection, infiniment voisin de M, les surfaces S_1 et S_2 se coupent à angle droit, on a

$$B + B' = 0.$$

On obtiendrait de même $B' + B'' = 0$, $B'' + B = 0$; donc $B = B' = B'' = 0$, et les équations des surfaces deviennent

$$x = Ay^2 + Cz^2 + \alpha,$$
$$y = A'z^2 + C'x^2 + \beta,$$
$$z = A''x^2 + C''y^2 + \gamma.$$

On voit que les lignes de courbure de S_1 sont tangentes en M aux axes My et Mz, lesquels sont aussi tangents, en ce même point, aux intersections de S_1 avec S_2 et S_3.

Cela étant vrai pour un point quelconque, la remarque qui précède démontre le théorème de Charles Dupin.

SUR LES CERCLES TANGENTS A TROIS CERCLES ET LES SPHÈRES TANGENTES A TROIS OU A QUATRE SPHÈRES;

Par M. A. PELLET.

1. Les cercles qui passent par les points d'intersection de deux cercles et les coupent sous des angles égaux jouent par rapport aux cercles donnés le même rôle que les bissectrices de deux droites par rapport à ces droites.

Ainsi tout cercle qui est tangent à deux cercles coupe orthogonalement un de leurs cercles bissecteurs, et réciproquement tout cercle qui coupe orthogonalement un des deux cercles bissecteurs de deux cercles et touche l'un d'eux est aussi tangent à l'autre.

On le voit aisément, lorsque les deux cercles se coupent, en transformant la figure par rayons vecteurs réciproques, le pôle de la transformation est en un des deux points de rencontre. Les deux cercles bissecteurs de deux cercles sont réels, si ceux-ci se coupent en deux points réels; dans le cas où les points de rencontre de deux cercles sont imaginaires, l'un des deux cercles bissecteurs est imaginaire, celui qui a pour centre le centre de similitude inverse; les centres des cerclés bissecteurs sont les centres de similitude des deux cercles.

2. Soient C_1, C_2 et C_3 trois cercles, et S_{12}, S'_{12}, S_{13}, S'_{13}, S_{23}, S'_{23} leurs cercles bissecteurs. Tout cercle qui coupe orthogonalement les deux cercles S_{12}, S_{13} et touche l'un des cercles C_1, C_2, C_3 est tangent aux deux autres. Il résulte de là que les deux points de rencontre des cercles S_{12}, S_{13} appartiennent à l'un des deux cercles S_{23} ou S'_{23}, et, par suite, les centres de similitude des trois cercles sont trois à trois en ligne droite. La condition de couper orthogonalement les cercles S_{12}, S_{13} équivaut à celle de passer par deux points situés sur la ligne des centres des cercles S_{12}, S_{13}; ces points seront donnés, par exemple, par l'intersection de cette ligne avec le cercle coupant orthogonalement les cercles C_1, C_2, C_3.

Ces considérations s'étendent facilement aux sphères, et l'on a les théorèmes suivants :

Étant données quatre sphères, par l'intersection de la sphère qui les coupe orthogonalement et d'un plan

de similitude des quatre sphères, il passe deux sphères tangentes à toutes les sphères données.

Les sphères qui coupent orthogonalement trois sphères données rencontrent l'un quelconque des axes de similitude des trois sphères en deux points fixes. *Toute sphère qui, passant par ces deux points, touche l'une des trois sphères données, touche les deux autres.*

QUESTION DE LICENCE (CAEN, 1880);

PAR M. SEQUESTRE,
Maître répétiteur au lycée d'Angoulême.

Trouver le lieu des foyers d'une hyperbole dont on connaît un sommet et une asymptote.

Je prends cette asymptote pour axe des x, et une perpendiculaire abaissée du sommet sur l'asymptote pour axe des y. Soit, de plus, β l'ordonnée du sommet;

$$(1)\qquad (x-x_1)^2+(y-y_1)^2-(mx+ny+h)^2=0$$

est l'équation générale des courbes du second degré, ayant le point x_1, y_1 pour foyer, et pour directrice correspondante la droite $mx+ny+h=0$.

En exprimant que l'axe des x est asymptote, on a

$$1-m^2=0 \quad \text{et} \quad x_1+mh=0,$$

d'où

$$m=\pm 1 \quad \text{et} \quad h=\mp x_1;$$

ou, en prenant pour m le signe $+$, le signe $-$ devant conduire évidemment aux mêmes résultats,

$$m=1, \quad h=-x_1.$$

La tangente au sommet a pour coefficient angulaire

$\dfrac{n\beta}{\beta - y_1 - n^2\beta + nx_1}$; en exprimant qu'elle est parallèle à la directrice dont le coefficient angulaire est $-\frac{1}{n}$, il vient

$$\frac{n\beta}{\beta - y_1 - n^2\beta + nx_1} = -\frac{1}{n},$$

d'où

$$n = \frac{y_1 - \beta}{x_1}.$$

Portant ces valeurs de m, n et h dans l'équation (1), elle devient

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 - \left(x + \frac{y_1 - \beta}{x_1} y - x_1\right)^2 = 0.$$

En exprimant que la courbe passe au sommet $(0, \beta)$, on a

$$(y - \beta)[(y + \beta)x^2 - \beta^2(y - \beta)] = 0,$$

et, en supprimant la solution évidemment étrangère $y - \beta = 0$, il vient, pour l'équation du lieu,

$$(y + \beta)x^2 - \beta^2(y - \beta) = 0 \text{ [1]}.$$

---

[1] Cette équation résulte assez simplement de la proposition suivante, qui est connue :

Si d'un foyer F *de l'hyperbole on abaisse une perpendiculaire* FH *sur une asymptote, on a, en nommant a, b les demi-axes et* C *le centre de la courbe,* CH $= a$, FH $= b$.

Cela étant, soit SG $= \beta$ la perpendiculaire menée du sommet donné S sur l'asymptote. La similitude des triangles rectangles CSG, CFH donne d'abord

$$\frac{CS}{SG} = \frac{CF}{FH}, \quad \frac{a}{\beta} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{b},$$

d'où

$$a^2b^2 = \beta^2(a^2 + b^2), \quad a^2(b^2 - \beta^2) = b^2\beta^2, \quad \frac{a^2}{b^2}(b^2 - \beta^2) = \beta^2.$$

En outre,

$$\frac{CH}{HF} = \frac{GH}{HF - SG}, \quad \text{ou} \quad \frac{a}{b} = \frac{x}{b - \beta}.$$

Il s'ensuit

$$\frac{x^2}{(b - \beta)^2}(b^2 - \beta^2) = \beta^2, \quad \frac{x^2(b + \beta)}{b - \beta} = \beta^2.$$

Mais $b = y$, donc

$$x^2(y + \beta) - \beta^2(y - \beta) = 0. \qquad \text{(G.)}$$

C'est l'équation d'une courbe du troisième degré passant par le sommet donné, symétrique par rapport à l'axe des y, et ayant pour asymptotes les droites

$$x = \pm \beta, \quad y = -\beta.$$

SUR LES CONIQUES QUI COUPENT A ANGLE DROIT UNE CONIQUE DONNÉE;

PAR M. WEILL.

Soient

$$f = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

et

$$\varphi = Ax^2 + 2Bxy + \ldots + F = 0$$

les equations de deux coniques. Si ces deux courbes se coupent à angle droit en tous leurs points communs, on aura, entre les coordonnées x et y d'un quelconque de ces points, la relation

$$b^2 x(Ax + By + D) + a^2 y(Bx + Cy + E) = 0.$$

Si l'on considère, dans cette relation, x et y comme coordonnées courantes, elle représentera une conique passant par les points communs aux deux premières; donc on pourra identifier cette relation avec le polynôme $\lambda f + \mu\varphi$, ce qui donne

$$(b^2 - \mu)A = \frac{\lambda}{a^2}, \quad (a^2 - \mu)C = \frac{\lambda}{b^2},$$
$$(a^2 + b^2 - 2\mu)B = 0,$$
$$(b^2 - 2\mu)D = 0, \quad (a^2 - 2\mu)E = 0, \quad \mu F - \lambda = 0.$$

Ces équations ont quatre systèmes de solutions entiè-

rement distincts, et l'on a ainsi quatre séries de coniques coupant l'ellipse $f = 0$ à angle droit; leurs équations sont, K étant une arbitraire,

$$\frac{x^2}{2b^2 - a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \mathrm{K}y + 1 = 0,$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{2a^2 - b^2} + \mathrm{K}x + 1 = 0,$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \mathrm{K}xy + \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} = 0,$$

$$\frac{x^2}{a^2 + \mathrm{K}} + \frac{y^2}{b^2 + \mathrm{K}} - 1 = 0.$$

Les trois premières représentent respectivement des coniques passant par quatre points fixes, à distance finie ou infinie, et la quatrième des coniques homofocales à l'ellipse donnée.

On voit que, par un point du plan, on peut mener cinq coniques coupant à angle droit une conique donnée; deux d'entre elles sont les coniques homofocales à la conique donnée, et les trois autres se construisent *linéairement*.

En transformant les propriétés précédentes par rayons vecteurs réciproques, on en déduit les systèmes de courbes du quatrième degré, ayant trois points doubles communs, dont deux sont les ombilics du plan, et se coupant à angle droit.

On traiterait de la même manière le problème des coniques coupant une conique donnée sous un angle donné V ou son supplément, en tous leurs points communs; mais les formules compliquées auxquelles on arrive paraissent peu intéressantes.

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1884.

Mathématiques spéciales.

Par le centre d'un ellipsoïde donné on mène trois diamètres conjugués quelconques, et, par les points où ces droites rencontrent la sphère circonscrite au parallélépipède formé par les plans tangents aux sommets de l'ellipsoïde, on fait passer des plans :

1° Trouver le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point donné P sur ces plans variables.

2° Ce lieu est une surface du quatrième ordre dont l'équation peut être ramenée à la forme suivante :

$$\begin{aligned}(x^2+y^2+z^2)^2 + 4Ax^2 + 4A'y^2 + 4A''z^2 \\ + 8Cx + 8C'y + 8C''z + 4D = 0;\end{aligned}$$

trouver toutes les sphères telles que chacune d'elles coupe la surface suivant deux cercles.

3° Ces sphères forment cinq séries parmi lesquelles deux ne sont pas distinctes :

Démontrer que les sphères de la série double passent toutes par un même point, et trouver le lieu de leurs centres;

Démontrer que les sphères de chacune des trois autres séries coupent respectivement à angle droit des sphères fixes S_1, S_2, S_3;

Trouver le lieu des centres des sphères de ces trois séries.

SOLUTION DE LA QUESTION DU CONCOURS GÉNÉRAL.

Soit

$$x^2+y^2+z^2=a^2+b^2+c^2$$

la sphère circonscrite au parallélépipède rectangle circonscrit lui-même à l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0;$$

soit

(1) $$lx+my+nz=1$$

le plan passant par les points de rencontre avec la sphère des trois demi-diamètres conjugués de l'ellipsoïde. Le cône, ayant pour base l'intersection de la sphère et du plan (1), a pour équation

$$x^2+y^2+z^2-(a^2+b^2+c^2)(lx+my+nz)^2=0,$$

et il est capable d'un trièdre de trois diamètres conjugués de l'ellipsoïde, si l'on a

(2) $$a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2=1\ (^1);$$

---

(1) Car, en faisant subir à l'ellipsoïde et au cône la transformation homographique

$$\frac{x}{a}=\frac{x'}{R},\quad \frac{y}{b}=\frac{y'}{R},\quad \frac{z}{c}=\frac{z'}{R},$$

l'ellipsoïde devient la sphère

$$x'^2+y'^2+z'^2=R^2,$$

et le cône devient

$$a^2x'^2+b^2y'^2+c^2z'^2-(a^2+b^2+c^2)(alx'+bmy'+cnz')^2=0.$$

Les diamètres conjugués restant conjugués dans la transformation et étant maintenant ceux d'une sphère, le cône doit être triorthogonal, ce qui exige

$$a^2+b^2+c^2-(a^2+b^2+c^2)(a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2)=0,$$

ou

$$1=a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2.$$

ce qui prouve que le plan (1) se déplace en restant tangent à l'ellipsoïde donné.

Le lieu cherché est donc la podaire de l'ellipsoïde par rapport au point donné.

Soient α, β, γ les coordonnées du point donné; la normale au plan (1) issue de ce point a pour équations

$$(3)\qquad \frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n} = u.$$

Éliminant l, m, n, u entre (1), (2) et (3), on a l'équation du lieu

$$\begin{aligned}(x^2+y^2+z^2-\alpha x-\beta y-\gamma z)^2\\ = a^2(x-\alpha)^2+b^2(y-\beta)^2+c^2(z-\gamma)^2.\end{aligned}$$

Transportant l'origine au point $\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2}\right)$, à l'aide des formules

$$x = x'+\frac{\alpha}{2},\quad y = y'+\frac{\beta}{2},\quad z = z'+\frac{\gamma}{2},$$

il vient, en supprimant les accents,

$$\begin{aligned}\left(x^2+y^2+z^2-\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{4}\right)^2\\ = a^2\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)^2+b^2\left(y-\frac{\beta}{2}\right)^2+c^2\left(z-\frac{\gamma}{2}\right)^2,\end{aligned}$$

ou

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned}&(x^2+y^2+z^2)^2+4Ax^2+4A'y^2+4A''z^2\\ &\qquad +8Cx+8C'y+8C''z+4D = 0,\end{aligned}\right.$$

avec

$$4A = -a^2-\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{2},$$

$$4A' = -b^2-\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{2},$$

$$4A'' = -c^2-\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{2},$$

$$8C = a^2\alpha,\quad 8C' = b^2\beta,\quad 8C'' = c^2\gamma,$$

$$4D = \frac{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2}{16}-\frac{a^2\alpha^2+b^2\beta^2+c^2\gamma^2}{4}.$$

L'intersection de la surface (4) avec une sphère

$$(5) \qquad x^2+y^2+z^2-2(ux+vy+wz+t)=0$$

est définie par cette équation (5) et par la combinaison suivante des équations (4) et (5) :

$$(6) \left\{ \begin{array}{l} (ux+vy+wz+t)^2 \\ \quad + Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Cx+2C'y+2C''z+D=0, \end{array} \right.$$

qui représente une quadrique. L'équation générale des quadriques passant par la biquadratique (5) et (6) est

$$(7) \left\{ \begin{array}{l} (ux+vy+wz+t)^2 \\ \quad + Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Cx+2C'y+2C''z+D \\ \qquad + \lambda[x^2+y^2+z^2-2(ux+vy+wz+t)]=0, \end{array} \right.$$

et, si cette dernière équation représente un système de deux plans, la biquadratique se compose de deux cercles. Formant les équations du centre

$$\begin{array}{l} u(ux+vy+wz+t)+(A+\lambda)x+C-\lambda u=0, \\ v(ux+vy+wz+t)+(A'+\lambda)y+C'-\lambda v=0, \\ w(ux+vy+wz+t)+(A''+\lambda)z+C''-\lambda w=0, \end{array}$$

qui peuvent s'écrire

$$(8) \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{u}{A+\lambda}(ux+vy+wz+t)+x+\dfrac{C-\lambda u}{A+\lambda}=0, \\ \dfrac{v}{A'+\lambda}(ux+vy+wz+t)+y+\dfrac{C'-\lambda v}{A'+\lambda}=0, \\ \dfrac{w}{A''+\lambda}(ux+vy+wz+t)+z+\dfrac{C''-\lambda w}{A''+\lambda}=0, \end{array} \right.$$

on tirerait x de la première, y de la deuxième, z de la troisième, si l'on connaissait $ux+vy+wz+t$. Prenant cette expression pour inconnue auxiliaire, on multiplie la première équation par u, la deuxième par v, la

troisième par w, et l'on ajoute ; ce qui donne

$$\left(\frac{u^2}{A+\lambda}+\frac{v^2}{A'+\lambda}+\frac{w^2}{A''+\lambda}+1\right)(ux+vy+wz+t)-t$$
$$+\frac{Cu}{A+\lambda}+\frac{C'v}{A'+\lambda}+\frac{C''w}{A''+\lambda}-\lambda\left(\frac{u^2}{A+\lambda}+\frac{v^2}{A'+\lambda}+\frac{w^2}{A''+\lambda}\right)=0.$$

Or, si l'on pouvait tirer de cette équation une seule valeur pour $ux+vy+wz+t$, la surface (7) n'aurait qu'un centre : on doit donc pouvoir en tirer une infinité, ce qui exige

(9) $$\frac{u^2}{A+\lambda}+\frac{v^2}{A'+\lambda}+\frac{w^2}{A''+\lambda}+1=0$$

et, par suite,

(10) $$t=\lambda+\frac{Cu}{A+\lambda}+\frac{C'v}{A'+\lambda}+\frac{C''w}{A''+\lambda}.$$

Désignant par μ l'indéterminée $ux+vy+wz+t$, on tire des équations (8)

$$x=\frac{(\lambda-\mu)u-C}{A+\lambda},$$
$$y=\frac{(\lambda-\mu)v-C'}{A'+\lambda},$$
$$z=\frac{(\lambda-\mu)w-C''}{A''+\lambda};$$

et il reste à écrire que ces coordonnées vérifient l'équation (7) ou, ce qui revient au même, la quatrième dérivée

$$t(ux+vy+wz+t)+Cx+C'y+C''z$$
$$+D-\lambda(ux+vy+wz+t)-\lambda t=0,$$

ce qui donne

(11) $$D-\lambda^2-\frac{C^2}{A+\lambda}-\frac{C'^2}{A'+\lambda}-\frac{C''^2}{A''+\lambda}=0.$$

Cette équation du cinquième degré en λ, ne renfer-

mant que λ, le fera donc connaître. Portant la valeur connue de λ dans l'équation (11), on aura une relation entre les coordonnées du centre d'une des sphères, c'est-à-dire le lieu des centres. L'équation (10) fera connaître t et, par suite, le rayon.

Il y a donc cinq séries de sphères.

Remplaçant, dans l'équation (11), D, C, C', C'', A, A', A'' par leurs valeurs, elle s'écrit

$$\begin{aligned}
&\frac{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2}{64} - \frac{a^2\alpha^2+b^2\beta^2+c^2\gamma^2}{16} - \lambda^2 \\
&\quad - \frac{a^4\alpha^2}{64\left(\lambda - \dfrac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{8} - \dfrac{a^2}{4}\right)} \\
&\quad - \frac{b^4\beta^2}{64\left(\lambda - \dfrac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{8} - \dfrac{b^2}{4}\right)} \\
&\quad - \frac{c^4\gamma^2}{64\left(\lambda - \dfrac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{8} - \dfrac{c^2}{4}\right)} = 0,
\end{aligned}$$

ou, en groupant les termes qui renferment a^2, qui renferment b^2, qui renferment c^2 :

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{8} - \lambda\right)\left(\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{8} + \lambda\right) \\
&\quad - \frac{a^2\alpha^2}{16}\,\frac{\lambda - \dfrac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{8}}{\lambda - \dfrac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{8} - \dfrac{a^2}{4}} \\
&\quad - \frac{b^2\beta^2}{16}\,\frac{\lambda - \dfrac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{8}}{\lambda - \dfrac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{8} - \dfrac{b^2}{4}} \\
&\quad - \frac{c^2\gamma^2}{16}\,\frac{\lambda - \dfrac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{8}}{\lambda - \dfrac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{8} - \dfrac{c^2}{4}} = 0.
\end{aligned}$$

On aperçoit la racine $\lambda' = \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{8}$ et, en l'enlevant, il vient

$$(12)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{8} + \lambda + \frac{a^2\alpha^2}{16\left(\lambda - \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{8} - \frac{a^2}{4}\right)} \\ + \frac{b^2\beta^2}{16\left(\lambda - \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{8} - \frac{b^2}{4}\right)} \\ + \frac{c^2\gamma^2}{16\left(\lambda - \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{8} - \frac{c^2}{4}\right)} = 0, \end{aligned} \right.$$

ou

$$\begin{aligned} \left(\lambda - \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{8}\right) + \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{4} \\ + \frac{a^2\alpha^2}{16\left(\lambda - \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{8} - \frac{a^2}{4}\right)} \\ + \frac{b^2\beta^2}{16\left(\lambda - \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{8} - \frac{b^2}{4}\right)} \\ + \frac{c^2\gamma^2}{16\left(\lambda - \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{8} - \frac{c^2}{4}\right)} = 0, \end{aligned}$$

ou, en groupant dans les quatre derniers termes ceux qui renferment α^2, qui renferment β^2, qui renferment γ^2 au numérateur,

$$\begin{aligned} \lambda - \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{8} + \frac{\alpha^2}{4}\,\frac{\lambda - \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{8}}{\lambda - \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{8} - \frac{a^2}{4}} \\ + \frac{\beta^2}{4}\,\frac{\lambda - \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{8}}{\lambda - \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{8} - \frac{b^2}{4}} \\ + \frac{\gamma^2}{4}\,\frac{\lambda - \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{8}}{\lambda - \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{8} - \frac{c^2}{4}} = 0. \end{aligned}$$

On aperçoit encore la racine $\lambda = \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{8}$ et, en l'enlevant, il vient

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} &1 + \frac{\alpha^2}{4\left(\lambda - \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{8} - \frac{a^2}{4}\right)} \\ &+ \frac{\beta^2}{4\left(\lambda - \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{8} - \frac{b^2}{4}\right)} \\ &+ \frac{\gamma^2}{4\left(\lambda - \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{8} + \frac{c^2}{4}\right)} = 0. \end{aligned}\right.$$

Donc, deux séries de sphères ne sont pas distinctes.

En remplaçant λ par $\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{8}$ dans l'équation (9), on a le lieu des centres

$$(14)\qquad \frac{u^2}{\frac{a^2}{4}} + \frac{v^2}{\frac{b^2}{4}} + \frac{w^2}{\frac{c^2}{4}} - 1 = 0,$$

et, l'équation (10) donnant

$$t = \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{8} - \frac{\alpha u + \beta v + \gamma w}{2},$$

l'équation des sphères (5) devient

$$\begin{aligned} &x^2+y^2+z^2 - \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{4} \\ &\quad + u(\alpha - 2x) + v(\beta - 2y) + w(\gamma - 2z) = 0. \end{aligned}$$

On voit qu'elle est vérifiée, quels que soient u, v, w, par

$$x = \frac{\alpha}{2}, \quad y = \frac{\beta}{2}, \quad z = \frac{\gamma}{2},$$

coordonnées actuelles du point dont on prend la podaire.

Donc, toutes les sphères de la série double passent par un point fixe, le point donné.

Supposant $a > b > c$, et substituant à λ, dans l'équation (13),

$$-\infty,\quad \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{8}+\frac{a^2}{4},\quad \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{8}+\frac{b^2}{4},\quad \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{8}+\frac{c^2}{4},\quad +\infty,$$

on a la succession de signes

$$+\quad -|+\quad -\,|+\quad -\,|+\quad +;$$

donc l'équation (13) a ses trois racines réelles et séparées.

L'équation (9), où λ est une des trois racines en question, donne le lieu des centres

$$(14)'\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{u^2}{\dfrac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{8}+\dfrac{a^2}{4}-\lambda} \\ +\dfrac{v^2}{\dfrac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{8}+\dfrac{b^2}{4}-\lambda} \\ +\dfrac{w^2}{\dfrac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{8}+\dfrac{c^2}{4}-\lambda}-1=0. \end{array}\right.$$

Ce lieu est : pour la plus petite racine, un ellipsoïde; pour la moyenne, un hyperboloïde à une nappe; pour la plus grande, un hyperboloïde à deux nappes. Ces trois surfaces et l'ellipsoïde (14) sont homofocaux, puisque les différences des dénominateurs de u^2, v^2 et w^2 sont les mêmes en passant de l'une à l'autre.

Remplaçant t par sa valeur (10) dans l'équation des sphères (5), cette équation devient

$$(15)\quad \left\{\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2-2\lambda-2u\left(x+\dfrac{C}{A+\lambda}\right) \\ \quad 2v-\left(y+\dfrac{C'}{A'+\lambda}\right)-2w\left(z+\dfrac{C''}{A''+\lambda}\right)=0. \end{array}\right.$$

Dire que les sphères (15), correspondant à une valeur de λ, racine de l'équation (13), sont orthogonales à une sphère fixe, c'est dire qu'il y a un point de l'espace qui a même puissance par rapport à la sphère (15), quels que soient u, v, w, pourvu qu'ils vérifient l'équation (14). On est donc conduit à égaler à zéro les coefficients de u, v, w, ce qui fournit le point

$$x = -\frac{C}{A+\lambda}, \quad y = -\frac{C'}{A'+\lambda}, \quad z = -\frac{C''}{A''+\lambda},$$

dont la puissance par rapport à la sphère (15) est indépendante de u, v, w et égale à

$$\frac{C^2}{(A+\lambda)^2} + \frac{C'^2}{(A'+\lambda)^2} + \frac{C''^2}{(A''+\lambda)^2} - 2\lambda.$$

Ce point est le centre de la sphère cherchée, et la quantité ci-dessus est le carré de son rayon.

L'équation (13) ayant trois racines, *chaque série de sphères est donc orthogonale à une sphère fixe* S_1, S_2 *ou* S_3.

Ces trois sphères sont orthogonales deux à deux, car il suffit, pour cela, que le carré de la distance de leurs centres soit égal à la somme des carrés de leurs rayons, c'est-à-dire que l'on ait, après simplifications, λ et λ' étant deux racines distinctes de l'équation (13),

$$\frac{C^2}{(A+\lambda)(A+\lambda')} + \frac{C'^2}{(A'+\lambda)(A'+\lambda')} + \frac{C''^2}{(A''+\lambda)(A''+\lambda')} = \lambda + \lambda'.$$

Or c'est le résultat qu'on obtient en retranchant du premier membre de l'équation (11), dont λ et λ' sont également racines, ce premier membre où l'on a remplacé λ par λ', et en divisant la différence par $\lambda - \lambda'$,

qui est différent de zéro, puisque λ et λ' sont des racines distinctes.

Ces trois sphères passent par le point fixe donné, car leur équation

$$x^2+y^2+z^2+2\frac{Cx}{A+\lambda}+2\frac{C'y}{A'+\lambda}+2\frac{C''z}{A''+\lambda}+2\lambda=0$$

devient l'équation (12), quand on y remplace x, y et z par $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$ et $\frac{\gamma}{2}$, et l'équation (12) admet les trois racines de l'équation (13).

De là résulte que le trièdre des trois droites qui joignent le point donné, commun aux trois sphères, aux centres de ces trois sphères est un trièdre trirectangle ([1]).

Ch. B.

SUR UNE QUESTION DE GÉOMÉTRIE;

PAR M. LASER.

Dans son *Cours de Géométrie*, Bobillier ([2]) a proposé comme exercice le problème suivant, dont il n'a pas donné la solution :

Diviser un triangle par des perpendiculaires tirées d'un point intérieur sur les côtés en trois quadrilatères équivalents.

Soient :

α, β, γ les angles dont les sommets sont A, B, C;

([1]) Voir, pour l'origine de la question, *Nouvelles Annales*, 2e série, t. III, p. 206, un article de M. Moutard et l'ouvrage de M. Darboux : *Sur une classe remarquable*, etc., p. 113 et 156.

([2]) Édition de 1880, p. 189.

a, b, c les côtés opposés ;
O le point cherché.

Prenons d'abord pour axes des x et des y les directions de AB, AC ; et, pour plus de simplicité, supposons c égal à l'unité.

En décomposant le quadrilatère correspondant à A en un parallélogramme par des parallèles aux axes menées par le point O, et en deux triangles, et en exprimant que l'expression de l'aire obtenue est égale à $\frac{1}{3}\frac{b\sin\alpha}{2}$, on trouve

$$(1)\qquad y^2 + x^2 + \frac{2xy}{\cos\alpha} = \frac{b}{3\cos\alpha} = \frac{\sin\beta}{3\cos\alpha\sin\gamma}.$$

Si nous prenons maintenant BA, BC pour axes des x' et y', nous avons, de la même manière,

$$y'^2 + x'^2 + \frac{2x'y'}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha}{3\cos\beta\sin\gamma}.$$

Changeons maintenant la direction de la partie positive de l'axe des x' et remplaçons ensuite x' par $x'-1$, de manière à ramener l'origine en A ; il vient

$$y'^2 + x'^2 - \frac{2x'y'}{\cos\beta} + \frac{2y'}{\cos\beta} - 2x' = \frac{\sin\alpha}{3\cos\beta\sin\gamma} - 1;$$

mais on voit sans peine que

$$y' = \frac{y\sin\alpha}{\sin\beta},\quad x' = x + \frac{y\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta} = x + \frac{y\sin\gamma}{\sin\beta},$$

et l'équation précédente devient

$$\begin{aligned}\left(\sin^2\alpha + \sin^2\gamma - \frac{2\sin\alpha\sin\gamma}{\cos\beta}\right)\frac{y^2}{\sin^2\beta} + x^2 \\ + \frac{2}{\sin\beta}\left(\sin\gamma - \frac{\sin\alpha}{\cos\beta}\right)xy \\ - \frac{2}{\sin\beta}\left(\sin\gamma - \frac{\sin\alpha}{\cos\beta}\right)y - 2x = \frac{\sin\alpha}{3\cos\beta\sin\gamma} - 1.\end{aligned}$$

En remplaçant, dans le coefficient de y^2, $\sin\gamma$ par

$$\sin(\alpha+\beta),$$

et, dans les coefficients de xy et x, $\sin\gamma\cos\beta$ par

$$-\sin\gamma\cos(\alpha+\gamma),$$

il vient, en réduisant,

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha\tan\beta)y^2\\ &+x^2-\frac{2\cos\gamma}{\cos\beta}xy+\frac{2\cos\gamma}{\cos\beta}y-2x\\ &=\frac{\sin\alpha}{3\cos\beta\sin\gamma}-1.\end{aligned}\right.$$

En éliminant x^2 au moyen de l'équation (1), on trouve

$$\begin{aligned}&\frac{\sin\alpha\sin\gamma}{\cos\beta}y^2+\left(\frac{\cos\gamma}{\cos\beta}+\frac{1}{\cos\alpha}\right)xy-\frac{\cos\gamma}{\cos\beta}y+x\\ &=\frac{1}{2}-\frac{\sin\alpha}{6\cos\beta\sin\gamma}+\frac{\sin\beta}{6\cos\alpha\sin\gamma}\end{aligned}$$

ou encore

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned}&\frac{\sin\alpha\sin\gamma}{\cos\beta}y^2+\frac{\sin\gamma\tan\alpha}{\cos\beta}xy-\frac{\cos\gamma}{\cos\beta}y+x\\ &=\frac{1}{2}-\frac{\sin\alpha}{6\cos\beta\sin\gamma}+\frac{\sin\beta}{6\cos\alpha\sin\gamma}.\end{aligned}\right.$$

Nous allons examiner deux cas particuliers :

1° *Triangle isoscèle.* — $\gamma=\beta$, $\alpha=180°-2\beta$.

On doit avoir évidemment $y=x$ et l'équation (1) donne

$$(4)\qquad y=\sqrt{\frac{1}{6(1+\cos\alpha)}}.$$

Il s'agit maintenant de s'assurer que l'équation (3) est satisfaite par cette valeur. Or, en y faisant seulement

$y = x$, $\gamma = \beta$, on trouve

$$y^2 \sin\alpha \operatorname{tang}\beta = \tfrac{1}{6};$$

d'où, en vertu de la valeur (4),

$$\sin\alpha \cot\frac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha,$$

ce qui est bien une identité.

Si le triangle est rectangle, $\alpha = 90°$, d'où

$$y = \sqrt{\tfrac{1}{6}};$$

s'il est équilatéral, $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, d'où

$$y = \tfrac{1}{3},$$

comme on devait s'y attendre.

Ainsi, dans le cas particulier dont il s'agit, la solution du problème rentre dans le domaine de la Géométrie élémentaire.

2° *Triangle rectangle.* — $\alpha = 90$, $\gamma = 90° - \beta$.

L'équation (1) donne

$$(5) \qquad x = \frac{\operatorname{tang}\beta}{6y},$$

et l'équation (2)

$$-y^2 + x^2 - 2xy \operatorname{tang}\beta + 2y \operatorname{tang}\beta - 2x = \frac{1}{3\cos^2\beta} - 1,$$

ou, en remplaçant xy par sa valeur déduite de l'équation (5),

$$-y^2 + x^2 + y^2 \operatorname{tang}\beta - 2x = \tfrac{2}{3}(\operatorname{tang}^2\beta - 1),$$

et en éliminant x au moyen de la même équation, et posant $\operatorname{tang}\beta = \varepsilon$

$$36y^4 - 72\varepsilon y^3 + 24(\varepsilon^2 - 1)y^2 + 12\varepsilon y - \varepsilon^2 = 0,$$

équation qui, renfermant l'arbitraire ε, n'est générale-

ment pas décomposable en deux facteurs du second degré. On voit ainsi que, même dans le cas particulier du triangle rectangle non isoscèle, le problème n'est pas soluble par la règle et le compas, et *a fortiori* dans le cas général.

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une lettre de M. Juhel-Rénoy, à Bordeaux.

Le théorème sur lequel s'appuie M. Weill (même tome, p. 136) est un cas particulier du suivant :

Soient A, B, C, D *quatre points d'une conique à centre, situés sur un même cercle de centre* O. *Soient* OQ *la perpendiculaire abaissée du cercle sur* AB, ωP *la perpendiculaire abaissée du centre de la conique sur le côté opposé* CD, *et* ωR *la perpendiculaire abaissée de* ω *sur* AB, *enfin* V *l'angle de* AB *et de* CD; *on a la relation*

$$OQ = \frac{(a^2 - b^2)\omega P - (a^2 + b^2)\omega R}{(a^2 + b^2) + (a^2 - b^2)\cos V}.$$

Je vous ai déjà signalé ce théorème, comme généralisant une question proposée par M. Laguerre (3e série, t. I, p. 380).

PUBLICATIONS RÉCENTES.

1. Bullettino di bibliografia e di storia delle Scienze matematiche e fisiche, pubblicato da *B. Boncom-*

pagni, socio ordinario dell' Accademia pontificia de' nuovi Lincei; socio corrispondente dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna; delle R. Accademie delle Scienze di Torino, e di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, e socio onorario della R. Accademia delle Scienze di Berlino.

Tomo XVI, 1883.

GENNAIO. — Alcuni scritti inediti di *Galileo Galilei*, tratti dai manoscritti della Biblioteca nazionale di Firenze, pubblicati ed illustrati da *Antonio Favaro*.

FEBBRAIO. — Alcuni scritti inediti di *Galileo Galilei*, tratti dai manoscritti della Biblioteca nazionale di Firenze, pubblicati ed illustrati da *Antonio Favaro* (continuazione).

Annunzi di recenti pubblicazioni.

MARZO. — Alcuni scritti inediti di *Galileo Galilei*, tratti dai manoscritti della Biblioteca nazionale di Firenze, pubblicati ed illustrati da *Antonio Favaro* (fine).

APRILE. — Brano di lettera del sig. prof. *Angelo Genocchi*, diretta a *D.-B. Boncompagni*, in data di « Torino, 14 marzo 1883 ».

Sopra un' equazione indeterminata. Nota dell' ingegnere *S. Realis*.

Lettera di *Carlo Federico Gauss* al Dr *Enrico Guglielmo Mattia Olbers*, traduzione dal tedesco del Dr Alfonso Sparagna.

Lettera di *Carlo Federico Gauss* al Dr *Enrico Guglielmo Mattia Olbers*. Testo tedesco pubblicato secondo l'autografo posseduto dalla Società reale delle Scienze di Göttingen.

Annunzi di recenti pubblicazioni.

MAGGIO. — Sur la vie et les écrits mathématiques de *Jean-Antoine-Nicolas Caritat*, marquis *de Condorcet*. — *Charles Henry*.

Travaux de *J.-A.-N. Caritat*, marquis *de Condorcet*.

Des méthodes d'approximation pour les équations différentielles lorsqu'on connaît une première valeur approchée. Mémoire inédit de *J.-A.-N. Caritat*, marquis *de Condorcet*. (Bibliothèque de l'Institut de France. Portefeuille M.57e, in-folio.)

GIUGNO. — Vita di *Leon-Batista-Alberti di Girolamo*

Mancini, in Firenze. G.-C. Sansoni, editore; 1882. In-16 di 580 pagine (VI.574). — *A. Favaro.*

Nicolaus Coppernicus von Leopold Prowe. Erster Band : das Leben. I. Theil 1473-1512. Berlin, Weidmannsche Buchhandlung, 1883. In-8° gr., di pag. 441. (XXVIII-413). *Nicolaus Coppernicus, von Leopold Prowe.* Erster Band : das Leben. II. Theil 1512-1543. Berlin, Weidmannsche Buchhandlung, 1883. In-8° gr. di pag. 576. — *A. Favaro.*

Annunzï di recenti pubblicazioni.

Luglio. — Bibliographie néerlandaise historico-scientifique, etc; par le Dr *D. Bierens de Haan.* Nouvelles additions.

Sommaire scientifique.

Agosto. — Intorno al problema : *Le Nœud de cravate,* e ad alcune opere di Urbano d'Aviso Romano. — *Ferd. Jacobi.*

Annunzi di recenti pubblicazioni.

2. American Journal of Mathematics. J.-J. Sylvester, editor. Thomas Craig, Ph. D., assistant editor. Published under the auspices of the Johns Hopkins University. Volume VI, number 4; mai 1884.

Contents. — Symmetric Functions of the 13e; by Captain P. A. *Mac-Mahon,* R. A.

On the resolution of equations of the fifth degree; by *Emory Mc. Clintock.*

Some papers of the Theory of Numbers; by *Arthur S. Hathaway.*

Proof of a Theorem in Partitions; by *Morgan Jenkins.*

Further List of corrections suggested by *M. Jenkins* to Prof. *Sylvester's* Constructive Theory of Partitions; by *Morgan Jenkins.*

On Theta-Functions with complex characteristics; by *Thomas Craig.*

On the propagation of an arbitrary Electro-magnetic disturbance, on spherical waves of light and the dynamical Theory of diffraction; by Prof. *H.-A. Rowland.*

The Method of Graphs applied to compound partitions; by *G.-S. Ely.*

3. Atti della R. Accademia dei Lincei, anno CCLXXXI, 1883-1884; serie terza. — *Transunti*, volume VIII, fascicolo 10°. Adunanza generale delle due classi del giorno, 6 april 1884. Roma, coi tipi del Salviucci; 1884.

4. Revue mensuelle d'Astronomie populaire, de Météorologie et de Physique du globe. Donnant le tableau permanent des découvertes et des progrès réalisés dans la connaissance de l'Univers, publiée par *Camille Flammarion*, avec le concours des principaux astronomes français et étrangers. Abonnement pour un an : Paris, 12^{fr}; Départements, 13^{fr}; Étranger, 14^{fr}. Prix du numéro, 1^{fr},20. La Revue paraît le 1er de chaque mois. Paris, Gauthier-Villars, imprimeur-libraire de l'Observatoire de Paris, quai des Augustins, 55.

Sommaire du n° 5 (mai 1884).

La formation du système solaire; par M. *Faye*, Membre de l'Institut (4 figures). — *Les fluctuations de l'activité solaire;* par M. *C. Flammarion* (2 figures). — *Déclinaison de l'aiguille aimantée à Paris* (2 figures). — *L'étoile double* 85 *Pégase* (1 figure). — *Statistique des tremblements de terre;* par M. *C. Détaille*. — *Les tremblements de terre;* par M. *Rey de Morande*. — *Académie des Sciences.* Variétés : L'oscillation atmosphérique produite par l'éruption de Krakatoa (1 figure). Découvertes nouvelles sur Saturne (1 figure). Découvertes nouvelles sur Uranus. Découvertes nouvelles sur Neptune. Vénus visible en plein jour. L'Observatoire de Nice. Congrès des Sociétés savantes à la Sorbonne. Taches solaires visibles à l'œil nu. Passages de Vénus et taches solaires visibles à l'œil nu. Taches solaires par superficie et par nombre. Les illuminations crépusculaires. Observations d'occultations. Observatoire dans l'île d'Ischia. La nouvelle étoile variable U Ophiuchus. — *Observations astronomiques* (3 figures) et *Études sélénographiques* (2 figures); par M. *Gérigny*.

SOMMAIRE DU N° 6 (JUIN 1884).

L'Etoile du Berger; par M. *C. Flammarion* (1 figure). — *La formation du système solaire;* par M. *C. Flammarion* (1 figure). — *Éclaircissements donnés par M.* Faye *au sujet de son hypothèse cosmogonique. — Les grands instruments de l'Astronomie. L'équatorial coudé de l'Observatoire de Paris;* par M. *Philippe Gérigny* (3 figures). — *Nouvelles de la Science.* Variétés : Photographies de la Lune obtenues à l'aide d'une petite lunette. Singulier bolide (1 figure). Bolide lent ou Bradyte. Mars dans les instruments de moyenne puissance (1 figure). Influence de la Lune sur la pesanteur à la surface de la Terre. Observations nouvelles sur Saturne (1 figure). Conjonction d'Uranus et de β de la Vierge. Éclat de Neptune et sa variabilité. Prix d'Astronomie proposé par l'Académie des Sciences de Danemark. Uranolithe tombé à Grossliebenthal, près d'Odessa, le 17 novembre 1881. Singulier mouvement de la mer à Montevideo. Tremblement de terre en mer. Phases de Vénus, visibles à l'œil nu. Les Saints de glace. Société scientifique Flammarion, à Marseille. Le régime officiel. — *Observations astronomiques;* par M. *E. Vimont* (2 figures).

5. ÉTUDES SUR LES MACHINES A VAPEUR. Exposé historique et critique de toutes les expériences dynamométriques faites à bord du *Primauguet,* sur le rendement des machines marines, par MM. les ingénieurs du port de Brest; par *Auguste Taurines,* ancien professeur de la marine, auteur et constructeur du dynamomètre de rotation. Ouvrage couronné par l'Académie des Sciences. (Prix extraordinaire destiné à récompenser tout progrès de nature à accroître l'efficacité de nos forces navales.) Paris, Gauthier-Villars, imprimeur-libraire du Bureau des Longitudes, de l'École Polytechnique, successeur de Mallet-Bachelier, quai des Augustins, 55; 1884.

6. HISTOIRE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES; par M. *Maximilien Marie,* répétiteur de Méca-

nique, examinateur d'admission à l'École Polytechnique. Tome IV : *de Descartes à Huygens*. Paris, Gauthier-Villars, imprimeur-libraire, quai des Grands-Augustins, 55; 1884.

7. Traité élémentaire des Quaternions; par *P.-G. Tait*, professeur des Sciences physiques à l'Université d'Édimbourg. Traduit sur la seconde édition anglaise, avec Additions de l'auteur et Notes du traducteur; par M. *Gustave Plarr*, docteur ès sciences mathématiques. Seconde Partie : *Géométrie des courbes et des surfaces. Cinématique. Application à la Physique*. Paris, Gauthier-Villars, imprimeur-libraire du Bureau des Longitudes, de l'École Polytechnique, quai des Augustins, 55; 1884.

8. Exercices de Géométrie descriptive; par *F. I. C.* Deuxième édition. Tours, Alfred Mame et fils, imprimeurs-libraires. Paris, Poussielgue frères, rue Cassette, 15; 1884.

Tirages a part.

1. *Sur le dernier théorème de Fermat;* par M. E. de Jonquières. (Extrait des *Atti dell' Accademia pontificia de' nuovi Lincei.*) Rome, imprimerie des Sciences mathématiques et physiques, via Lata, n° 3; 1884.

2. *Sur les tétraèdres de Möbius;* par J. Neuberg, chargé de Cours à l'École des Mines de Liège. (Extrait des *Mémoires de la Société royale des Sciences de Liège*, 2e série, t. XI.) Bruxelles, F. Hayez, imprimeur de l'Académie royale de Belgique, rue de Louvain, 108; 1884.

3. *Alcune applicazioni del principio del minimo lavoro all' equilibrio di sistemi vincolati.* Nota del S. C. prof. G. Bardelli. (Estratto dai *Rendiconti del R. Istituto Lombardo,* serie II, vol. XVII, fasc. II). Milano, tip. Bernardoni di C. Rebeschini E. C.; 1884.

4. *Sopra tre Teoremi del Cesaro.* Note del prof. G.-B. Rafanelli. (Estratto dal fascicolo Maggio-Giugno del *Giornale della Società di letture e conversazioni scientifiche.*) Genova, tipografia di Angelo Ciminago, vico Mele, numero 7, secondo piano; 1884.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1469

(voir 3e série, t. II, p. 431);

Par M. E. CATALAN.

a, b étant des nombres entiers, la quantité

$$\frac{(a+\sqrt{a^2+b^2})^{2n-1}+(-a+\sqrt{a^2+b^2})^{2n-1}}{2\sqrt{a^2+b^2}}$$

est la somme de deux carrés, et aussi la somme de trois carrés ($n \overline{\gtrless} 2$).

I. Soient

$$\alpha = a+\sqrt{a^2+b^2}, \quad \beta = -a+\sqrt{a^2+b^2}.$$

On a, *identiquement,*

$$(1)\quad \frac{\alpha^{2n-1}+\beta^{2n-1}}{\alpha+\beta}=\left(\frac{\alpha^n\pm\beta^n}{\alpha+\beta}\right)^2+\left(b\,\frac{\alpha^{n-1}\mp\beta^{n-1}}{\alpha+\beta}\right)^2 \text{ (1)}.$$

En effet, si l'on chasse les dénominateurs, cette égalité devient

$$\begin{aligned}(\alpha^{2n-1}&+\beta^{2n-1})(\alpha+\beta)\\ &=\alpha^{2n}\pm2\alpha^n\beta^n+\beta^{2n}+\alpha\beta(\alpha^{2n-2}\mp2\alpha^{n-1}\beta^{n-1}+\beta^{2n-2})\\ &=\alpha^{2n}+\beta^{2n}+\alpha^{2n-1}\beta+\alpha\beta^{2n-1};\end{aligned}$$

ce qui est exact.

Il reste à prouver que chacun des termes, dans l'identité (1), est un *nombre entier*.

Considérons, par exemple, la fraction

$$\frac{\alpha^n+\beta^n}{\alpha+\beta}=\frac{(a+\sqrt{a^2+b^2})^n+(-a+\sqrt{a^2+b^2})^n}{2\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Si, comme on l'a supposé, n est *impair,* cette quantité se réduit à

$$\frac{n}{1}a^{n-1}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}(a^2+b^2)+\ldots+(a^2+b^2)^{\frac{n-1}{2}},$$

et celle-ci est un *nombre entier*.

Le *premier théorème* est donc démontré.

II. *Remarque.* — Si α, β sont des nombres entiers, pris arbitrairement, le premier membre de l'égalité (1) peut n'être point la somme de deux carrés.

Exemple :

$$\frac{3^3+1}{3+1}=7.$$

---

(1) Les signes supérieurs, si n est *impair.*

III. D'après l'identité (1) :

1° Si n est *impair*,

$$\frac{\alpha^n + \beta^n}{\alpha + \beta} = f^2 + g^2.$$

Donc

$$\left(\frac{\alpha^n + \beta^n}{\alpha + \beta}\right)^2 = (f^2 + g^2)^2 = (f^2 - g^2)^2 + (2fg)^2.$$

2° Si n est *pair*, et supérieur à 2,

$$\frac{\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}}{\alpha + \beta} = f^2 + g^2;$$

puis

$$\left(b\,\frac{\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}}{\alpha + \beta}\right)^2 = b^2(f^2 - g^2)^2 + (2bfg)^2.$$

Dans les deux cas, *la quantité*

$$\frac{\alpha^{2n-1} + \beta^{2n-1}}{\alpha + \beta}$$

est une somme de trois carrés.

IV. *Application.* $a = 2$, $b = 3$, $\alpha = 2 + \sqrt{13}$, $\beta = -2 + \sqrt{13}$, $n = 3$.

On trouve :

1° $$\frac{\alpha^5 + \beta^5}{\alpha + \beta} = 769$$

$$= \left(\frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha + \beta}\right)^2 + \left(b\,\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha + \beta}\right)^2 = 35^2 + 12^2;$$

2° $$\left(\frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha + \beta}\right)^2 = 7^2 + 24^2;$$

$$769 = 7^2 + 24^2 + 12^2.$$

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc; Goffart; Genty.

Question 1474

(voir 3e série, t. II, p. 479);

PAR M. E. FAUQUEMBERGUE,
Professeur au lycée de Nice.

a, x, y étant des nombres entiers, chaque valeur de x qui vérifie l'équation

$$(a^2+1)x^2=y^2+1$$

est la somme de trois carrés. Il y a exception pour $x=1$ et pour $x=4a^2+1$.

(E. CATALAN.)

Cette proposition est la conséquence immédiate d'un théorème communiqué par M. de Jonquières à M. Gerono, et inséré dans le numéro de mai 1878 (p. 220) des *Nouvelles Annales*; en voici l'énoncé :

THÉORÈME. — *Si l'on représente par $\frac{P_n}{Q_n}$ la réduite de rang n $\left(\text{la première étant, selon l'usage, } \frac{1}{0}\right)$ de la fraction continue suivant laquelle se développe la racine carrée de a^2+1 (a étant un nombre entier), on a les deux relations*

$$P_{2n}=P_n.Q_n+P_{n+1}.Q_{n+1},$$
$$Q_{2n}=\overline{Q_n}^2+\overline{Q_{n+1}}^2.$$

Or, l'équation proposée est de la forme

$$y^2-Ax^2=-1,$$

et l'on sait que, lorsqu'une équation de cette forme est résoluble en nombres entiers, toutes ses solutions sont données par les deux termes des réduites de rang pair $\left(\text{la première étant } \frac{1}{0}\right)$, dans le développement de $\sqrt{A}$ en

fraction continue. On a donc ici

$$x = Q_{2n} = \overline{Q_n}^2 + \overline{Q_{n+1}}^2.$$

Mais des deux termes Q_n, Q_{n+1}, l'un est nécessairement de rang pair et, par suite, égal à une somme de deux carrés; donc $\overline{Q_n}^2$ ou $\overline{Q_{n+1}}^2$ est aussi une somme de deux carrés. Donc enfin Q_{2n} est une somme de trois carrés. Il y a exception pour $n = 1$ et $n = 2$.

En effet, pour $n = 1$, $Q_1 = 0$, $Q_2 = 1$ et $x = 1$; pour $n = 2$, $Q_2 = 1$, $Q_3 = 2a$ et $x = 1 + 4a^2$.

Question 1475

(voir 3ᵉ série, t. II, p. 479);

PAR M. E. FAUQUEMBERGUE.

Résoudre, en nombres entiers, l'équation

$$x^2 + y^2 = u^2 + v^2 + 1.$$

(E. CATALAN.)

On obtiendra une infinité de solutions de cette équation au moyen des deux identités suivantes, faciles à vérifier,

$$(2\alpha + 1)^2 + (\alpha - 1)^2 = (\alpha + 1)^2 + (2\alpha)^2 + 1,$$
$$(2\alpha^2 + 1)^2 + (\beta^2 - 1)^2 = (2\alpha^2 - \beta^2 + 1)^2 + (2\alpha\beta)^2 + 1.$$

Mais il est probable que ces identités ne donnent pas toutes les solutions possibles.

Note. — M. Moret-Blanc indique une infinité d'autres solutions. On vérifie, d'ailleurs, l'équation proposée en faisant $y = 1$,

$$x = p^2 + q^2, \quad u = p^2 - q^2, \quad v = 2pq,$$

p et q étant des nombres entiers quelconques.

Question 1480

(voir 3e série, t. II, p. 480);

PAR M. E. CATALAN.

THÉORÈME. — *La somme des puissances $4n$, de deux nombres entiers, inégaux, est une somme de quatre carrés, dont deux sont égaux entre eux.*

La propriété énoncée résulte, immédiatement, de l'identité

$$x^{4n}+y^{4n}=\left(\frac{x^{2n+2}\pm y^{2n+2}}{x^2+y^2}\right)^2 +2\left(xy\,\frac{x^{2n}\mp y^{2n}}{x^2+y^2}\right)^2+\left(x^2y^2\,\frac{x^{2n-2}\pm y^{2n-2}}{x^2+y^2}\right)^2,$$

dont la vérification est facile ([1]). D'ailleurs, pour que toutes les fractions se réduisent à des nombres entiers, on doit prendre les *signes supérieurs* si n est *pair*. Enfin, n doit surpasser 1.

Application. Soient $n=8$, $x=2$, $y=1$:

$$\begin{aligned}2^{32}+1&=\left(\frac{2^{18}+1}{2^2-1}\right)^2+2\left(2.\,\frac{2^{16}-1}{2^2+1}\right)^2+\left(4.\,\frac{2^{14}+1}{2^2+1}\right)^2\\&=\left(\frac{262\,145}{5}\right)^2+2\left(2.\,\frac{65\,535}{5}\right)^2+\left(4.\,\frac{16\,385}{5}\right)^2\\&=52\,429^2+2.26\,214^2+13\,108^2\\&=2\,748\,800\,041+2.687\,173\,796+171\,819\,644,\end{aligned}$$

ou

$$2^{32}+1=4\,294\,967\,297,$$

résultat connu ([2]).

([1]) Pour l'effectuer, il suffit de faire disparaître les dénominateurs, et de développer les carrés des quatre binômes.

([2]) LEGENDRE, *Théorie des Nombres*, t. I, p. 223.

Question 1481

(voir 3e série, t. II, p. 528);

PAR UN ANONYME.

Résoudre les équations

$$(1)\qquad x^4 - x^3\sqrt{15} + 4x^2 - 1 = 0,$$

$$(2)\qquad x^4 - x^3\sqrt{3} - 2x^2 + 2x\sqrt{3} - 1 = 0.$$

Interpréter leurs racines.

(GOFFART.)

I. *Résolution des équations proposées.* — En appliquant à ces équations les méthodes qui déterminent les racines communes, on trouve que leurs premiers membres ont pour plus grand commun diviseur

$$x^2 - x\,\frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{2} + \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

et qu'on a identiquement

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} & x^4 - x^3\sqrt{15} + 4x^2 - 1 \\ &\quad = \left[x^2 - x\,\frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{2} + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] \\ &\quad\quad \times \left[x^2 + x\,\frac{\sqrt{3}(1-\sqrt{5})}{2} + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \end{aligned}\right.$$

et

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} & x^4 - x^3\sqrt{3} - 2x^2 + 2x\sqrt{3} - 1 \\ &\quad = \left[x^2 - x\,\frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{2} + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] \\ &\quad\quad \times \left[x^2 - x\,\frac{\sqrt{3}(1-\sqrt{5})}{2} + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]. \end{aligned}\right.$$

La résolution des équations (1) et (2) est ainsi ramenée à celle d'équations du second degré.

Les racines de l'équation (1) proposée sont

$$x_1 = \frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{4} + \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4},$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{4} - \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4},$$

$$x_3 = \frac{\sqrt{3}(-1+\sqrt{5})}{4} + \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},$$

$$x_4 = \frac{\sqrt{3}(-1+\sqrt{5})}{4} - \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

L'équation (2) a pour racines

$$x_1,\ x_2,\ -x_3,\ -x_4.$$

II. *Interprétation des racines obtenues.* — La racine $-x_4$ représente le côté du pentédécagone régulier inscrit dans un cercle dont le rayon est pris pour unité; car ce côté a pour valeur

$$2\sin\frac{\pi}{15} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} - \frac{\sqrt{3}(-1+\sqrt{5})}{4} = -x_4.$$

Il résulte encore des formules de la Trigonométrie que les racines x_1, x_2, x_3 sont respectivement égales à

$$2\sin\frac{8\pi}{15},\quad 2\sin\frac{2\pi}{15},\quad 2\sin\frac{4\pi}{15},$$

c'est-à-dire égales aux côtés des trois pentédécagones étoilés.

Note. — M. H. Plamenevsky, maître à l'École reale Temir-Chanchoura (Caucase), a résolu directement chacune des deux équations proposées et trouvé ainsi les racines qui leur sont communes, au moyen de calculs assez étendus pour qu'il ne nous soit pas possible, faute d'espace, de les reproduire ici. Quant à l'interprétation des racines obtenues, l'auteur de cette solution remarque seulement qu'elles sont les abscisses des points d'intersection d'un cercle et de deux paraboles dont il fait connaître les équations.

Les mêmes équations ont aussi été résolues par MM. Moret-Blanc,

et X..., mathém. élém. à Rouen, qui ont remarqué, tous deux, que les racines de ces équations représentent les côtés des quatre pentédécagones inscrits dans un cercle de rayon égal à l'unité.

Question 1482

(voir 3ᵉ série, t. II. p. 528);

PAR M. MORET-BLANC.

OA *et* OB *étant deux droites fixes quelconques, on considère une ellipse variable tangente à* OA *au point* O, *ayant une courbure constante en ce point et dont un foyer reste constamment sur* OB. *Démontrer que le grand axe de cette ellipse passe par un point fixe.*

(D'OCAGNE.)

Soit C le centre de courbure fixe situé sur la normale commune.

Abaissons CM perpendiculaire sur OB et MN perpendiculaire sur OC : quelle que soit l'ellipse variable, le point N appartient à l'axe focal. Cela résulte immédiatement de la construction connue par laquelle on détermine le centre de courbure d'un point donné d'une ellipse, et qui n'est autre que l'inverse de la précédente.

Remarque. — Soit fait l'angle COD = COB : une droite menée par N coupe OB et OD en deux points F, F′, qui sont les foyers d'une conique tangente à OA au point O, et ayant en ce point pour rayon de courbure OC. La conique est une ellipse ou une hyperbole suivant que F et F′ sont du même côté ou de côtés différents de OA. Si la droite menée par le point N est parallèle à l'une des droites OB, OD, la conique est une parabole ayant son foyer sur l'autre.

Note. — La même question a été résolue par MM. A. Droz; N. Goffart; Sequestre; E. Barisien; A. Tissier, à Poitiers; Henri Bourget; L. B., qui a donné une démonstration analytique, et par un Anonyme.

MM. Sequestre et Barisien remarquent que le théorème énoncé est vrai pour une conique quelconque.

M. Goffart fait observer qu'on aurait pu énoncer aussi ce théorème :

Une ellipse est tangente au point O, *à une droite* OA, *où sa courbure est constante; son grand axe passe par un point fixe pris sur le rayon de courbure du point* O. *Démontrer que les foyers décrivent des droites fixes.*

Ces droites passent au point O, et sont symétriques, par rapport à OA.

QUESTIONS.

1488. Décomposer en deux facteurs du second degré le premier membre de l'équation

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0,$$

où l'on suppose

$$A\sqrt{D} = C.$$

(Francesco Borletti.)

1489. p étant un nombre premier, et P un polynôme entier à coefficients entiers, l'équation

$$(x+y)^p - x^p - y^p = pxy(x+y)P^2,$$

n'est vérifiée que par

$$p = 7 \quad \text{et} \quad P = x^2 + xy + y^2.$$

(E. Catalan.)

1490. Vérifier l'identité

$$\begin{aligned}(2a)^{n-1} - C_{n-2,1}(2a)^{n-3} + C_{n-3,2}(2a)^{n-5} - \ldots \\ = C_{n,1}a^{n-1} + C_{n,3}a^{n-3}(a^2-1) + C_{n,5}a^{n-5}(a^2-1)^2 + \ldots.\end{aligned}$$

(E. Catalan.)

1491. Trouver le lieu géométrique des points d'où

l'on voit sous le même angle deux segments donnés de deux droites fixes.

Cas où les deux droites sont rectangulaires.

(E. FAUQUEMBERGUE.)

1492. Soit O un point intérieur à un triangle ABC, démontrer que

$$\frac{OA.BC}{\sin(BOC - BAC)} = \frac{OB.AC}{\sin(COA - CBA)} = \frac{OC.AB}{\sin(AOB - ACB)}.$$

(J. BRILL, B. A.)

(Extrait du journal anglais : *The educational Times*, juin 1884.)

1493. On suppose que les côtés a, b, c d'un triangle sont multiples du rayon r du cercle inscrit, et l'on donne la somme $s = a^3 + b^3 + c^3$ de leurs cubes : trouver les valeurs de ces côtés.

Exemple :

$$s = 13824.$$

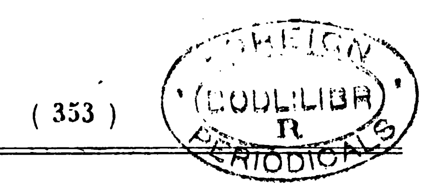
1494. Soient a et m deux points quelconques d'une conique, b et c les extrémités d'une corde parallèle à la tangente en a. Menons par les points b et c des parallèles à la droite am, qui rencontrent la conique aux points b' et c' respectivement ; la droite $b'c'$ est parallèle à la tangente au point m. (GENTY.)

RECTIFICATION

(3ᵉ série, t. II, p. 527, lignes 1 et 2).

Question **1474**, p. 432, lisez *question* **1477**, p. 480.

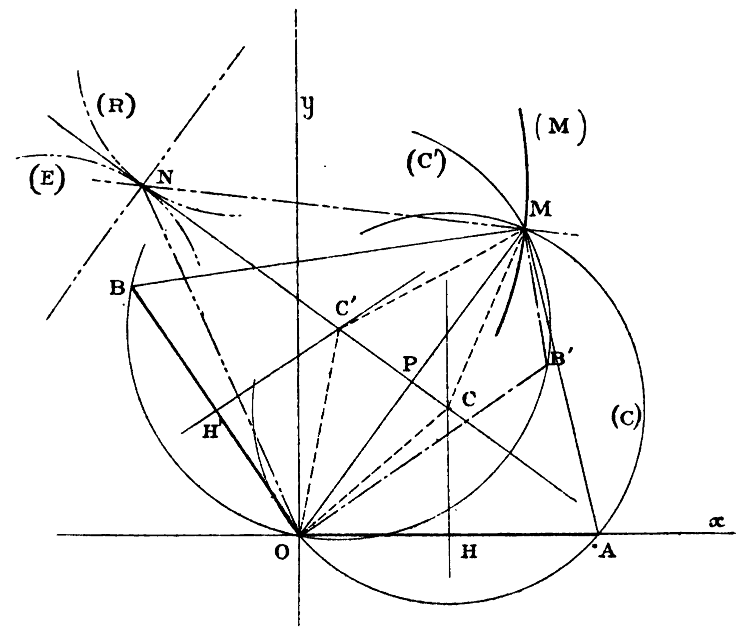
Note. — La question 1477 a été résolue par MM. Séquestre; Moret-Blanc; J. Terrier; Borletti; Goffart; J. Thomas; Léon Clément; Henri Valdès; et B. Kefersdein, à Strasbourg.



SUR UN SYSTÈME PARTICULIER DE COORDONNÉES CURVILIGNES;

PAR M. E. HABICH,
Directeur de l'École spéciale des Constructions et des Mines, à Lima.

I. Soient $OA = a$ et $OB = b$ deux segments de droites, ayant la même origine O et faisant un angle $AOB = \alpha$.



Appelons λ et μ les angles OMA et OMB sous lesquels on voit, d'un point M situé dans le plan AOB, les deux segments OA et OB.

Le point M est déterminé par l'intersection de deux

arcs de cercle (C) et (C′) capables des angles λ et μ et passant le premier par les points O et A, et le second par les points O et B.

Soient $r = \mathrm{MO}$ et $\theta =$ l'angle MOA les coordonnées polaires d'un point quelconque des deux cercles considérés, et, en particulier, les coordonnées du point de leur intersection M; on obtiendra des triangles OMA et OMB, en vertu de la proportionnalité des côtés avec les sinus des angles opposés,

$$(1)\qquad r = a\,\frac{\sin(\lambda + \theta)}{\sin\lambda},$$

$$(2)\qquad r = b\,\frac{\sin(\mu + \alpha - \theta)}{\sin\mu}.$$

Si le segment OB avait la position OB′, on aurait à changer, dans (2), les signes des angles α et θ.

Les expressions (1) et (2) sont les équations des deux cercles coordonnés (C) et (C′).

Divisant les numérateurs développés des expressions (1) et (2) par leurs dénominateurs, on pourra les mettre sous la forme

$$(3)\qquad \cot\lambda = \frac{r - a\cos\theta}{a\sin\theta} = \frac{x^2 - ax + y^2}{ay},$$

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} \cot\mu &= \frac{r - b\cos(\alpha - \theta)}{b\sin(\alpha - \theta)} \\ &= \frac{x(x - b\cos\alpha) + y(y - b\sin\alpha)}{b(x\sin\alpha - y\cos\alpha)} \\ &\quad (x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta). \end{aligned}\right.$$

Considérons maintenant le lieu géométrique des intersections de deux systèmes de cercles, les premiers passant par les points O, A, et les seconds par les points O, B, et capables respectivement des angles $\lambda = \mathrm{AMO}$ et $\mu = \mathrm{BMO}$, liés par une relation donnée

$$(5)\qquad \mathrm{F}(\cot\lambda, \cot\mu) = 0.$$

La courbe (M) est déterminée par un système particulier de coordonnées curvilignes, constituées par les deux cercles (3), (4); son équation (5) est celle qui lie les paramètres $\cot\lambda$, $\cot\mu$, et elle est le lieu des points d'où l'on voit les deux segments OA et OB sous des angles liés par la relation (5). C'est là le système de coordonnées curvilignes que nous nous proposons d'étudier.

II. Les centres C et C′ des deux cercles coordonnés (C) et (C′) se trouvent sur des perpendiculaires CH et C′H′ menées respectivement par le milieu H de OA et le milieu H′ de OB. Le point M est symétrique de l'origine O par rapport à la droite des centres C, C′.

Soient (E) l'enveloppe des droites des centres CC′, P le pied de la perpendiculaire abaissée de l'origine O sur CC′, c'est-à-dire sur la tangente de la courbe (E); on a

$$\mathrm{OM} = 2\,\mathrm{OP}.$$

La courbe (P), lieu des points P, est la *podaire* de (E), par rapport à l'origine O; il s'ensuit que la ligne (M) est semblable à la podaire (P), semblablement placée, par rapport à l'origine O, et amplifiée au double ou, si l'on veut, elle est la podaire d'une courbe semblable à l'enveloppe (E), amplifiée au double.

En transformant par rayons vecteurs réciproques la podaire (P), on trouvera la *polaire réciproque* (E′) de l'enveloppe (E). Pour effectuer cette transformation, nous remplacerons, dans les formules (3) et (4),

$$\frac{r}{2} \text{ par } \frac{A^2}{r}, \quad \text{ou} \quad r \text{ par } \frac{2A^2}{r} = \frac{c^2}{r},$$

ce qui donne

$$(6) \qquad \cot\lambda = \frac{c^2 - ar\cos\theta}{ar\sin\theta} = \frac{c^2 - ax}{ay},$$

$$(7) \qquad \cot\mu = \frac{c^2 - br\cos(\alpha - \theta)}{br\sin(\alpha - \theta)} = \frac{c^2 - b(x\cos\alpha + y\sin\alpha)}{b(x\sin\alpha - y\cos\alpha)}.$$

Ainsi, connaissant la relation paramétrique (5), on pourra, en remplaçant les cotangentes de λ et de μ par leurs valeurs (6), (7), déterminer, en coordonnées polaires ou en coordonnées rectangulaires, l'équation de la polaire réciproque (E') de l'enveloppe (E).

Les lignes coordonnées sont deux droites (6), (7), respectivement perpendiculaires aux diamètres OC et OC' des cercles (3) et (4). Si les deux segments AO et BO appartiennent à la même droite, α sera égal à zéro ou à π, et les dénominateurs des expressions (3), (4) et (6), (7) seront des monômes contenant la seule variable y. Cela introduit des simplifications dont nous parlerons plus loin.

III. Comme l'enveloppe (E) est l'antipodaire de la podaire (P) ou la polaire réciproque de son inverse (E'), elle est complètement déterminée. Mais on peut aussi chercher son équation directement en partant de la relation paramétrique (5), comme on l'a fait pour les lignes (P), (M) et (E').

Soient ρ et ω les coordonnées polaires d'un point quelconque de la droite des centres CC', c'est-à-dire de la tangente à la courbe (E). On aura

$$\rho\cos(\omega-\theta) = \mathrm{OP} = \tfrac{1}{2}\mathrm{OM} = \tfrac{1}{2}r.$$

Éliminant, entre cette équation et les équations (3) et (4), premièrement le rayon vecteur r, et ensuite la $\operatorname{tang}\theta$, et substituant à la place des coordonnées polaires les coordonnées rectangulaires

$$\mathrm{X} = \rho\cos\omega \quad \text{et} \quad \mathrm{Y} = \rho\sin\omega,$$

on trouvera, pour l'équation de la droite CC',

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &2\mathrm{X}(a\cot\lambda + b\cos\alpha\cot\mu - b\sin\alpha) \\ &\quad + 2\mathrm{Y}(b\cos\alpha + b\sin\alpha\cot\mu - a) \\ &\quad + ab\sin\alpha(1-\cot\lambda\cot\mu) \\ &\qquad - ab\cos\alpha(\cot\lambda + \cot\mu) = 0. \end{aligned}\right.$$

Cette équation (8) est celle de la droite enveloppée CC'; elle contient les deux paramètres $\cot\lambda$ et $\cot\mu$ liés par la relation (5), et l'équation de son enveloppe est précisément celle de la courbe (E).

En résumé, connaissant la relation paramétrique (5), on pourra trouver les équations des lignes (P), (M), (E') et (E), soit en coordonnées polaires, soit en coordonnées rectangulaires, au moyen des formules (3), (4), (6), (7) et (8).

La question inverse serait, connaissant l'équation d'une de ces lignes (P), (M), (E') et (E) en coordonnées polaires ou en coordonnées rectangulaires, de chercher la relation paramétrique (5). Si l'on connaissait les équations des lignes (P), (M) et (E'), l'élimination des coordonnées x, y, ou r, θ, entre ces équations et les expressions (3), (4) ou (6), (7), donnerait la relation paramétrique qui lie les $\cot\lambda$ et $\cot\mu$. Si la courbe (E) était donnée, on considérerait ses coordonnées X, Y ou ρ, ω comme des paramètres liés par l'équation donnée de cette courbe, et l'on chercherait l'enveloppe de la ligne (8), où $\cot\lambda$ et $\cot\mu$ seraient prises pour coordonnées.

IV. Soient (R) une courbe symétrique de l'enveloppe (E), par rapport à la tangente CC'; N le point actuel de contact de la droite CC' avec la courbe (E) et, par suite, aussi avec sa symétrique (R). Supposons le point M invariablement lié à la courbe (R), et faisons-la rouler sur la courbe (E). Le point M, dans ce mouvement, décrira la courbe (M), puisque, dans toutes ses positions, il sera symétrique de l'origine O, par rapport à la tangente CC' à la courbe (E), au point commun de contact N.

Le centre instantané de rotation étant en N, la nor-

male à la courbe (M) passe par le point où la droite des centres CC′ touche son enveloppe (E).

Supposons maintenant que l'origine O soit un foyer lumineux, et (E) une courbe réfléchissante. Comme l'angle ONP = PNM, le rayon ON émané du foyer O sera réfléchi suivant la direction NM de la normale à la courbe (M). Cette courbe (M) qui rencontre normalement les rayons réfléchis est leur *anticaustique*, et sa développée leur *caustique*.

L'identité entre les roulettes particulières considérées plus haut et les anticaustiques des rayons réfléchis a été indiquée par L'Hôpital dans son *Analyse des infiniment petits*, sect. VI, corollaire II, p. 150 de l'édition de 1768, à Avignon. Tout ce qu'on connaît sur les roulettes particulières produites par le roulement d'une courbe sur une courbe égale et symétrique, ou, ce qui est la même chose, au sujet des anticaustiques par réflexion, s'applique intégralement aux courbes (M) et (E); à leurs développées, etc.

V. Arrêtons-nous sur le cas spécial où la relation (5) entre les paramètres $\cot\lambda$ et $\cot\mu$ est algébrique.

Soit d'abord

$$A\cot\lambda + B\cot\mu + C = 0 \tag{9}$$

une équation du premier degré par rapport aux paramètres $\cot\lambda$ et $\cot\mu$.

En éliminant $\cot\lambda$ et $\cot\mu$ entre l'équation donnée (9) et les équations (3), (4) et (6), (7), on trouvera une équation du troisième degré pour la courbe (M), et du second degré pour son inverse (E′). Comme cette courbe du second degré (E′) passe par l'origine O, sa polaire réciproque (E) est une *parabole*.

Donc, *la ligne lieu des points d'où l'on voit deux*

segments OA *et* OB *de même origine* O, *sous des angles dont les cotangentes sont liées par une équation du premier degré, est, en général, une courbe du troisième degré* C *podaire de parabole.*

Le cas des angles égaux

$$\lambda = \mu \quad \text{ou} \quad \cot\lambda = \cot\mu$$

est évidemment compris dans l'équation (9).

Si les deux segments OA et OB appartiennent à une même droite, on a $\alpha = \pi$ ou $\alpha = 0$, et la courbe (M) est un cercle passant par l'origine O; son inverse (E') est une droite, et l'enveloppe (E) un point qui est le centre du cercle (M).

Donc, *le lieu des points d'où l'on voit deux segments consécutifs d'une même droite, sous des angles dont les cotangentes sont liées par une équation du premier degré, est un cercle passant par l'origine* O.

Sans nous arrêter sur la discussion de tous les cas particuliers qui correspondent à l'équation paramétrique (9), nous nous contenterons de remarquer que, en général, le degré des lignes (M) et (E') est respectivement trois fois, et deux fois celui de l'équation paramétrique, et, dans le cas de deux segments d'une même droite, deux fois, et une fois celui de la même équation.

Supposons maintenant que l'équation paramétrique soit du second degré

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} A\cot^2\lambda + B\cot\lambda\cot\mu \\ \quad + C\cot^2\mu + D\cot\lambda + E\cot\mu + F = 0. \end{array} \right.$$

La substitution des expressions (3), (4) et des expressions (6), (7), à la place des cotangentes, fait voir que l'équation de la courbe (M) sera, en général, du sixième degré, c'est-à-dire trois fois le degré de l'équation paramétrique, et l'équation de son inverse (E') du qua-

trième degré, c'est-à-dire deux fois celle de l'équation paramétrique.

L'enveloppe (E), qui est la polaire réciproque de la courbe (E′), sera, par conséquent, de la quatrième classe. Si les deux segments appartiennent à la même droite, on aura, pour le degré de l'équation de la ligne (M) et de son inverse (E′), deux fois et une fois le degré de l'équation paramétrique (10), il s'ensuit que, la polaire réciproque (E′) de (E) étant du second degré, l'enveloppe (E) est une conique.

Donc, *le lieu des points d'où l'on voit deux segments consécutifs d'une même droite, sous des angles dont les cotangentes sont liées par une équation complète du second degré, est une podaire de conique à centre.*

Si l'équation (10) ne contenait du second degré que le seul terme, produit des cotangentes, c'est-à-dire si les coefficients A et C étaient nuls, la courbe (E′) serait une conique, et, par suite, l'enveloppe (E) serait, de même, une conique.

Donc, *le lieu des points d'où l'on voit deux segments de même origine, mais non de même direction, sous des angles dont les cotangentes sont liées par la relation*

$$B \cot\lambda \cot\mu + D \cot\lambda + E \cot\mu + F = 0$$

est une podaire de conique à centre.

Si l'on avait, dans ce dernier cas, $\alpha = 0$ ou $\alpha = \pi$ avec $b = a$ et $D = 0$ et $E = 0$, le lieu (M) serait la podaire centrale de l'ellipse ou de l'hyperbole.

Si, outre les conditions précédentes, on avait $B = \pm F$, la ligne (M) serait un cercle, podaire relative au foyer d'une conique à centre.

En général, étant donnée une équation complète de degré m entre $\cot\lambda$ et $\cot\mu$, la courbe (M) sera du

degré $3m$, son inverse (E') du degré $2m$ et l'enveloppe (E) de la classe $2m$.

Si les deux segments appartenaient à la même droite, la courbe (M) serait du degré $2m$, son inverse (E') du degré m, et l'enveloppe (E) de la classe m.

Tels sont les plus hauts degrés des équations de lignes (M), (E') et la classe de l'enveloppe (E). Ils peuvent s'abaisser dans des cas particuliers.

Observation. — Ce que nous venons de dire au sujet du degré de l'équation d'une courbe (M) est applicable aussi au cas de deux segments qui ne partent pas d'une même origine O et qui, par conséquent, sont situés d'une manière quelconque dans le plan xOy des axes.

Comme le degré d'une ligne reste le même, quelle que soit sa position par rapport aux axes de coordonnées, il s'ensuit qu'en changeant la position des axes par rapport à un segment, l'équation du cercle coordonné (3) ou (4), qui lui correspond, ne change pas de degré, et, par conséquent, le degré de l'équation de la courbe (M) ne change pas non plus, pourvu que la relation paramétrique reste la même. Donc, en général, le degré de l'équation de la courbe (M) sera $3m$ dans le cas où l'équation paramétrique est algébrique et du degré m, quelle que soit la position des deux segments sur le plan xOy des axes.

Ainsi, par exemple, le lieu des points d'où l'on voit deux segments situés d'une manière quelconque sur le plan, sous des angles dont les cotangentes sont liées par une équation du premier degré, est une courbe du troisième degré, et un cercle si les deux segments appartiennent à une même droite.

VI. Les coordonnées circulaires que nous étudions appartiennent à la classe des *coordonnées curvilignes*

obliques. Effectivement l'angle i formé par les deux cercles coordonnés est égal à l'angle CMC′ des deux normales MC et MC′

$$i = \text{CMC}' = \text{COC}'.$$

Mais

$$\text{COC}' = \text{BOA} - \text{BOC}' - \text{AOC},$$

d'où

$$(11) \qquad i = \alpha - \left(\frac{\pi}{2} - \mu\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right) = \alpha - \pi + \lambda + \mu.$$

Si le segment OB occupe la position OB′, on a

$$(12) \qquad i = \alpha + \lambda - \mu.$$

L'angle d'intersection i de deux cercles coordonnés est égal à la somme algébrique de deux angles λ et μ à une constante près, et par suite cet angle i varie avec le déplacement du point M sur la trajectoire (M).

Cet angle $i = \text{COC}'$ est l'angle sous lequel on voit, de l'origine O, le segment CC′ de la tangente à la courbe (E), compris entre deux droites fixes CH et C′H′.

On peut dire encore que c'est l'angle sous lequel on voit de l'origine O la distance des centres C et C′ de deux cercles coordonnés.

Si l'angle i était constant, on aurait

$$\lambda + \mu = i - \alpha + \pi = \text{const} = \text{C},$$
$$\lambda - \mu = i - \alpha = \text{const} = \text{C},$$

d'où

$$(13) \qquad \cot\lambda \cot\mu \mp \cot \text{C}(\cot\lambda \pm \cot\mu) \mp 1 = 0.$$

Il est aisé de reconnaître, au moyen de l'équation paramétrique (13), que la courbe (M) est, dans ce cas, un cercle et de même son inverse (E′), et, par conséquent, que l'enveloppe (E) est une conique ayant l'origine O pour foyer.

Mais on peut le reconnaître directement. En effet,

comme

$$\lambda \pm \mu = \text{const.} = C,$$

il s'ensuit que la ligne (M) est un arc de cercle passant par les points A et B ou A et B′ et capable de l'angle constant c. La courbe (P), semblable à (M), est un arc de cercle qui passe par les points H et H′ et qui est capable du même angle c. Comme la ligne (P) est la podaire de l'enveloppe (E) et qu'elle est un cercle, il s'ensuit que cette enveloppe (E) est une conique ayant O pour foyer.

En outre, les points H et H′ appartenant à la podaire (P), les droites HC et H′C′ perpendiculaires à ses rayons vecteurs OH et OH′ sont tangents à la courbe (E). On arrive ainsi par cette nouvelle voie au théorème connu : que l'*angle sous lequel, du foyer d'une courbe du second degré, on voit le segment d'une tangente mobile compris entre deux tangentes fixes, est constant*; et on le complète en faisant voir que les coniques sont les *seules* courbes qui jouissent de cette propriété.

VII. Dans la Topographie et surtout dans l'Hydrographie, on rencontre fréquemment le problème ayant pour objet de déterminer la position d'un point M, connaissant celle de trois points A, O, B, et les angles OMA et OMB.

Dans ce problème, auquel on donne les noms de *problème de trois points, problème de relèvement, problème de la carte,* et aussi *problème de Pothenot,* on connaît les angles λ et μ par une mesure directe, ce qui leur assigne des valeurs déterminées.

Dans nos coordonnées, les angles λ et μ sont liés par une relation (5) entre leurs cotangentes; donc, pour que ces relations puissent servir à déterminer la position d'un ou de plusieurs points, il en faut *deux*. Les points M

seront, dans ce cas, déterminés par l'intersection de deux courbes (M) correspondant aux deux équations paramétriques.

On pourrait se proposer de chercher la position des points M d'où l'on voit *trois* segments donnés, sous des angles λ, μ, ν, liés par *deux* équations entre leurs cotangentes.

Si une équation entre λ et μ était relative aux deux premiers segments et une autre entre μ et ν, au deuxième et troisième segment, on obtiendrait la relation des angles μ et ν relatifs au premier et troisième segment en éliminant μ entre les deux équations données.

Ainsi, par exemple, étant données

$$\begin{aligned} A \cot\lambda + B \cot\mu + C &= 0, \\ A_1 \cot\mu + B_1 \cot\nu + C_1 &= 0, \end{aligned}$$

l'élimination de $\cot\mu$ conduirait à une relation du premier degré entre les cotangentes de μ et ν. Donc, en général, les points cherchés seraient déterminés par l'intersection de deux courbes du *troisième degré*.

La ligne du troisième degré qui correspond à la relation entre $\cot\mu$ et $\cot\nu$ passe par les points d'intersection des deux précédentes.

Si les trois segments considérés appartiennent à une même droite, les trois lignes (M) sont *trois cercles*.

Au point de vue analytique, la détermination de la valeur individuelle des trois angles λ, μ, ν demande trois équations.

On a déjà deux équations paramétriques; quant à la troisième, elle est fournie par la relation entre les angles λ, μ, ν, qui dérive de la connaissance des positions relatives de trois segments.

Ainsi, par exemple, si les trois segments étaient les trois côtés AO, BO, AB d'un triangle AOB, dans ce cas,

on aurait les relations obligatoires

$$\lambda + \mu + \nu = 2\pi \quad \text{ou} \quad \lambda \pm \mu = \nu,$$

suivant que le point M serait intérieur ou extérieur au triangle.

En particulier, pour le point d'où l'on voit sous des angles égaux les trois côtés d'un triangle, on a les deux relations paramétriques

$$\lambda = \mu = \nu,$$

et, en vertu de la relation de condition,

$$\lambda = \mu = \nu = \tfrac{1}{3}2\pi = 120^\circ.$$

VIII. Quel que soit le plan conduit suivant un segment donné OA, le lieu des points de ce plan, d'où l'on voit le segment OA sous un angle donné λ, est un arc de cercle passant par les points O et A et capable de l'angle λ. Il s'ensuit que, dans l'espace, le lieu considéré est une surface de révolution ayant le segment OA pour axe de révolution et pour méridien l'arc de cercle capable de l'angle λ. C'est donc une *surface de tore*. En substituant, à la place de y, $\sqrt{y^2 + z^2}$ dans l'équation (3), on obtiendra

$$(14) \qquad \cot\lambda = \frac{x^2 - 2ax + (y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}{2a(y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}},$$

ce qui est l'équation du tore ayant le segment OA pour axe des x et pour axe de révolution.

L'équation du tore correspondant à un segment situé d'une manière quelconque dans l'espace résultera de l'équation (14) en changeant les axes des coordonnées, ce qui ne change pas le degré de l'équation (14).

Si l'on avait une relation paramétrique

$$(15) \qquad F(\cot\lambda, \cot\mu) = 0.$$

en substituant aux cotangentes de λ et de μ les valeurs correspondantes (14), on aurait une équation entre x, y, z, qui serait celle de la surface ((M)), lieu des points d'où l'on voit les deux segments considérés sous des angles liés par la relation (15).

Remarquons que la surface considérée ((M)) est le lieu des lignes d'intersection des tores correspondant aux angles λ et μ liés par la relation (15).

Si l'on avait deux relations de la forme (15), on aurait deux surfaces ((M)), et la courbe d'intersection de ces deux surfaces satisferait à la condition que de ses points on voie les deux segments donnés sous des angles donnés λ et μ. Cette courbe est aussi celle de l'intersection de deux surfaces de tore correspondant aux valeurs bien déterminées des angles λ et μ.

Pour que la position du point M dans l'espace soit déterminée, il faut connaître, au moins, trois équations entre trois angles λ, μ, ν, sous lesquels on doit voir les trois segments donnés. Le point M est, dans ce cas, déterminé par l'intersection de trois surfaces.

Il y aurait à considérer le cas où les trois segments AO, BO, AB forment les trois côtés d'un triangle et avec le point M un tétraèdre, ayant le triangle des segments pour base et le point M pour sommet.

On a dans ce cas entre les angles la relation

$$\text{AMO} + \text{BMO} > \text{AMB},$$

ce qui signifie que les trois points A, O, B ne se trouvent pas sur une même droite. Dans ce dernier cas, le problème serait indéterminé : le lieu du point M serait un cercle perpendiculaire à l'axe commun de révolution.

On pourrait encore chercher à déterminer la position d'un point M, par rapport à *quatre* segments donnés, au moyen de *trois* relations entre les cotangentes des

quatre angles sous lesquels on voit du point M ces quatre segments.

Par ce que nous venons de dire, on voit que, dans le cas général de l'espace, les surfaces coordonnées sont des *surfaces de tore*, ayant les segments donnés pour axes de révolution et pour *méridiens* des arcs de cercle, capables des angles sous lesquels on doit voir ces segments.

Le *problème de relèvement* passe ainsi du plan à l'espace, c'est-à-dire de la Topographie et de l'Hydrographie, à la Navigation aérienne.

SUR LA CONSTRUCTION DES COURBES DONT L'ÉQUATION EST DONNÉE EN COORDONNÉES POLAIRES;

PAR M. CH. BIEHLER.

I.

CONSTRUCTION DE LA COURBE AUTOUR DU POLE.

1. Nous supposerons que l'équation de la courbe est algébrique et entière par rapport à ρ, et que les coefficients des diverses puissances de ρ soient des fonctions de ω, auxquelles la formule de Taylor soit applicable. Nous prendrons l'équation de la courbe sous la forme

$$(1)\qquad 0 = \varphi(\omega) + \rho\,\varphi_1(\omega) + \rho^2\,\varphi_2(\omega) + \ldots + \rho^m\,\varphi_m(\omega),$$

et nous allons nous proposer de déterminer la forme de la courbe autour du pôle, puis autour de l'un quelconque de ses points.

Soit α une racine simple de l'équation

$$\varphi(\omega) = 0,$$

et supposons que α n'annule pas $\varphi_1(\omega)$. Une seule racine de l'équation (1) tendra vers zéro, quand ω tend vers α. Soit ρ_1 cette racine et $\rho_2, \rho_3, \ldots, \rho_m$ les $m-1$ autres. On aura

$$\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}+\ldots+\frac{1}{\rho_m}=-\frac{\varphi_1(\omega)}{\varphi(\omega)};$$

les racines $\rho_2, \ldots, \rho_m$ étant différentes de zéro quand ω est voisin de α, c'est le terme $\frac{1}{\rho_1}$ qui donne son signe au premier membre, et, par suite, le signe de ρ_1 est fourni par l'expression

$$-\frac{\varphi_1(\omega)}{\varphi(\omega)},$$

quand ω est suffisamment voisin de α.

Posons

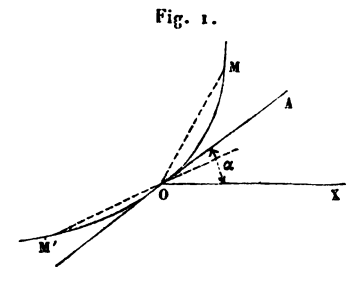
$$\omega=\alpha+\varepsilon;$$

le signe de $-\frac{\varphi_1(\omega)}{\varphi(\omega)}$ sera celui de

$$-\frac{\varphi_1(\alpha)}{\varepsilon\varphi'(\alpha)}.$$

Cette expression fournit donc le signe de ρ_1 dans le voisinage du pôle et du rayon polaire mené à une distance angulaire suffisamment voisine de α. La racine ρ_1 en-

Fig. 1.



gendre une branche de courbe tangente au pôle à la droite $\omega=\alpha$. Cette branche est tout entière située d'un même côté de sa tangente, car ρ_1 change de signe avec ε.

On obtient une disposition semblable à celle de la *fig.* 1. Cette figure a été construite dans l'hypothèse où $-\frac{\varphi_1(\alpha)}{\varepsilon\varphi'(\alpha)}$ est positif.

2. Supposons maintenant

$$\varphi(\alpha) = 0, \quad \varphi_1(\alpha) = 0,$$

avec

$$\varphi'(\alpha) \gtrless 0, \quad \varphi'_1(\alpha) \gtrless 0 \quad \text{et} \quad \varphi_2(\alpha) \gtrless 0.$$

Deux racines de l'équation (1) tendront vers zéro; soient ρ_1 et ρ_2 ces racines, nous aurons

$$(a) \qquad \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = -\left[\frac{\varphi_1(\omega)}{\varphi(\omega)} + S_1\right],$$

$$(b) \qquad \frac{1}{\rho_1 \times \rho_2} = \frac{\varphi_2(\omega)}{\varphi(\omega)} + S_1\left[\frac{\varphi_1(\omega)}{\varphi(\omega)} + S_1\right] - S_2,$$

en désignant par S_1 la somme $\frac{1}{\rho_3} + \frac{1}{\rho_4} + \ldots + \frac{1}{\rho_m}$, et par S_2 la somme des produits deux à deux des mêmes quantités.

Les sommes S_1 et S_2 restent finies quand ω tend vers α. Des formules (a) et (b) on tire

$$(c) \qquad \begin{cases} \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)^2 \\ \quad = \left[\frac{\varphi_1(\omega)}{\varphi(\omega)} + S_1\right]^2 - \frac{4\varphi_2(\omega)}{\varphi(\omega)} - 4S_1\left[\frac{\varphi_1(\omega)}{\varphi(\omega)} + S_1\right] + 4S_2. \end{cases}$$

Le seul terme du deuxième membre de la formule (c) qui devienne infini quand ω tend vers α est le terme

$$-\frac{4\varphi_2(\omega)}{\varphi(\omega)},$$

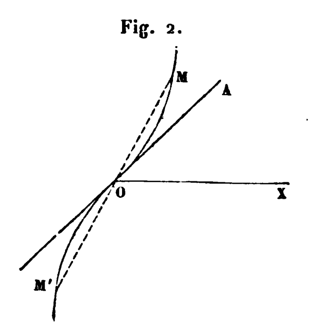
il donne son signe au deuxième membre et par suite à la fonction $\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)^2$. Or cette quantité a le signe de

$$-\frac{4\varphi_2(\alpha)}{\varepsilon\varphi'(\alpha)},$$

pour des valeurs de ε suffisamment petites. On voit donc que ε ne peut recevoir que des valeurs de signe contraire à $\frac{\varphi_2(\alpha)}{\varphi'(\alpha)}$, pour que ρ_1 et ρ_2 soient réels. Les racines ρ_1 et ρ_2 sont de signe contraire d'après la formule (a), et le signe de $\frac{\varphi_2(\alpha)}{\varphi'(\alpha)}$ indique quel est le seul signe possible de l'accroissement ε.

Les racines ρ_1 et ρ_2 engendreront donc une branche de courbe analogue à celle de la *fig.* 2. Le pôle est pour la courbe un point d'inflexion.

Fig. 2.



3. Supposons actuellement que α soit racine double de l'équation $\varphi(\omega) = 0$, et soit $\varphi_1(\alpha) \gtrless 0$.

La somme des inverses des racines est

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} + \ldots + \frac{1}{\rho_m} = - \frac{\varphi_1(\alpha + \varepsilon)}{\frac{\varepsilon^2}{1.2}\varphi''(\alpha) + \frac{\varepsilon^3}{1.2.3}\varphi'''(\alpha) + \ldots}.$$

Le signe du second membre est donné par

$$-\frac{\varphi_1(\alpha)}{\varphi''(\alpha)},$$

et ce signe reste le même quand ε varie entre deux limites $-\varepsilon_1$ et $+\varepsilon_1$; par conséquent, la racine ρ_1, qui seule tend vers zéro, conserve le même signe pour des valeurs positives et négatives de ε suffisamment petites.

Le pôle est dans ce cas un point de rebroussement de première espèce, et la droite $\omega = \alpha$ est la tangente de rebroussement. Le signe de $-\frac{\varphi_1(\alpha)}{\varphi''(\alpha)}$ donne la position de la courbe par rapport au pôle; la *fig.* 3 a été construite dans l'hypothèse de

$$-\frac{\varphi_1(\alpha)}{\varphi''(\alpha)} > 0.$$

Si l'on avait

$$\varphi(\alpha) = 0, \quad \varphi'(\alpha) = 0, \quad \ldots,$$
$$\varphi^{(p-1)}(\alpha) = 0, \quad \varphi^{(p)}(\alpha) \gtrless 0, \quad \varphi_1(\alpha) \gtrless 0,$$

une seule racine de l'équation tendrait encore vers zéro,

Fig. 3.

quand ω tend vers α; le signe de cette racine est évidemment, d'après ce qui précède, celui de

$$-\frac{\varphi_1(\alpha)}{\varphi^{(p)}(\alpha)\varepsilon^p}.$$

Si donc p est pair, la courbe aura la forme de la *fig.* 3; si p est impair, la forme de la courbe sera analogue à celle de la *fig.* 1.

4. Étudions maintenant le cas où α est racine double de $\varphi(\omega) = 0$ et racine simple de $\varphi_1(\omega) = 0$, on aura

$$\varphi(\alpha) = 0, \quad \varphi'(\alpha) = 0, \quad \varphi_1(\alpha) = 0,$$

avec

$$\varphi''(\alpha) \gtrless 0, \quad \varphi'_1(\alpha) \gtrless 0,$$

et soit

$$\varphi_2(\alpha) \gtrless 0.$$

Deux racines de l'équation (1) tendent vers zéro quand ω tend vers α, et l'on peut écrire les formules

$$(a') \quad \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = -\left[\frac{\varphi_1'(\alpha) + \frac{\varepsilon}{1.2}\varphi_1''(\alpha) + \ldots}{\frac{\varepsilon}{1.2}\varphi''(\alpha) + \ldots} + S_1\right],$$

$$(b') \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{\rho_1 \times \rho_2} &= \frac{\varphi_2(\alpha) + \varepsilon\varphi_2'(\alpha) + \ldots}{\frac{\varepsilon^2}{1.2}\varphi''(\alpha) + \ldots} \\ &\quad + S_1\left[\frac{\varphi_1'(\alpha) + \ldots}{\frac{\varepsilon}{1.2}\varphi''(\alpha) + \ldots} + S_1\right] - S_2, \end{aligned} \right.$$

$$(c') \quad \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2}\left\{\frac{\varphi_1'^2(\alpha) - 2\varphi_2(\alpha)\varphi''(\alpha)}{\left[\frac{1}{1.2}\varphi''(\alpha)\right]^2} + \varepsilon\psi(\alpha) + \varepsilon^2\psi_1(\alpha, \varepsilon)\right\}; \end{aligned} \right.$$

le signe de la quantité $\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)^2$ est évidemment celui de

$$\varphi_1'^2(\alpha) - 2\varphi_2(\alpha)\varphi''(\alpha).$$

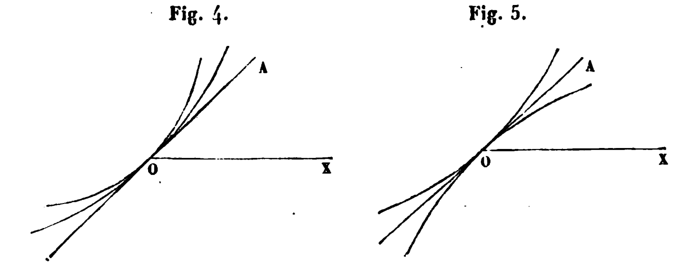
Si cette quantité est positive, ρ_1 et ρ_2 sont réels; si elle est négative, ρ_1 et ρ_2 sont imaginaires, et la tangente $\omega = \alpha$ est une tangente de rebroussement avec des branches imaginaires.

Supposons

$$\varphi_1'^2(\alpha) - 2\varphi_2(\alpha)\varphi''(\alpha) > 0;$$

ρ_1 et ρ_2 sont de même signe si $\frac{\varphi_2(\alpha)}{\varphi''(\alpha)} > 0$, et de signe contraire si $\frac{\varphi_2(\alpha)}{\varphi''(\alpha)} < 0$; c'est la somme $\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}$, ou plutôt la quantité $\frac{\varphi_1'(\alpha)}{\varphi''(\alpha)}$, qui donnera dans le premier cas le signe des racines.

On obtient une figure analogue à la *fig.* 4, quand les

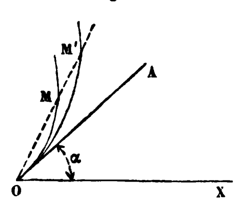


racines sont de même signe, et une figure analogue à la *fig.* 5, quand les racines sont de signe contraire.

Si $\varphi'_1(\alpha)^2 - 2\varphi_2(\alpha)\varphi''(\alpha) = 0$, la quantité $\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)^2$ prend la forme

$$\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)^2 = \frac{\psi(\alpha)}{\varepsilon} + \psi_1(\alpha, \varepsilon);$$

par suite, ρ_1 et ρ_2 ne sont plus réels, quel que soit ε; mais ils ne sont réels que quand ε est du signe de $\psi(\alpha)$. On peut voir aisément que, dans ce cas, ρ_1 et ρ_2 sont de même signe, car, $2\varphi_2(\alpha)\varphi''(\alpha)$ étant égal au carré $\varphi'^2_1(\alpha)$,



la formule (b') nous montre que, quel que soit le signe ε, le produit $\rho_1 \times \rho_2$ est positif. On obtient donc une disposition de la courbe analogue à celle de la *fig.* 6.

La formule (a') indique quel est le signe des racines ρ_1 et ρ_2. Si $\frac{\varphi'_1(\alpha)}{\varphi''(\alpha)}$ est positif, les racines sont de signe contraire

à ε, et si $\frac{\varphi'_1(\alpha)}{\varphi''(\alpha)}$ est négatif, les racines sont du signe de ε.

La *fig.* 6 a été construite dans l'hypothèse où la quantité $\frac{\varphi'_1(\alpha)}{\varphi''(\alpha)}$ est négative et où $\psi(\alpha) > 0$.

5. Nous pouvons supposer maintenant qu'un nombre quelconque des dérivées des fonctions φ et φ_1 soient nulles pour $\omega = \alpha$. Si $\varphi_2(\alpha) \gtrless 0$, il n'y aura que deux racines qui tendront vers zéro.

Soient

$$\begin{array}{llll} \varphi(\alpha) = 0, & \varphi'(\alpha) = 0, \quad \ldots, & \varphi^{(N-1)}(\alpha) = 0, & \varphi^{(N)}(\alpha) \gtrless 0, \\ \varphi_1(\alpha) = 0, & \varphi'_1(\alpha) = 0, \quad \ldots, & \varphi^{(n-1)}(\alpha) = 0, & \varphi^{(n)}(\alpha) \gtrless 0, \end{array}$$

et supposons $N > n$. Dans ce cas, les expressions de $\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}$ et de $\frac{1}{\rho_1 \rho_2}$ seront de la forme

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{A + A'\varepsilon}{\varepsilon^{N-n}},$$

$$\frac{1}{\rho_1 \rho_2} = \frac{B + B'\varepsilon}{\varepsilon^{N}},$$

A et B étant indépendants de ε.

On en tire

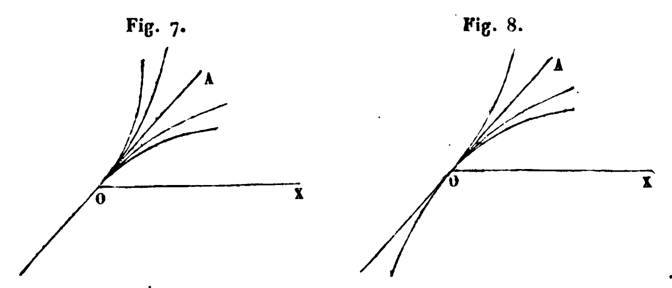
$$\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)^2 = \frac{(A + A'\varepsilon)^2}{\varepsilon^{2N-2n}} - \frac{4(B + B'\varepsilon)}{\varepsilon^{N}}.$$

Si $2N - 2n$ est supérieur à N, c'est-à-dire $N > 2n$, c'est le terme $\frac{A^2}{\varepsilon^{2N-2n}}$ qui donnera son signe au second membre; $\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)^2$ restera donc positif quand ε change de signe : les deux racines ρ_1 et ρ_2 sont toujours réelles; leurs signes sont aisés à trouver.

Si N et n sont tous deux pairs, la somme et le produit des racines conservent leurs signes, qui sont ceux des quantités A et B.

Si B est positif, on obtient une disposition analogue à celle de la *fig.* 7; si B est négatif, on obtient une figure analogue à la *fig.* 5.

La *fig.* 7 a été construite dans l'hypothèse de $A > 0$.



Si N et n étaient de parité différente, par exemple N pair et n impair, le produit des racines resterait toujours positif; mais les racines changeraient toutes deux de signe : on obtiendrait une figure analogue à la *fig.* 4.

Mais, si N est impair, les racines, d'un côté, sont de même signe, et de l'autre de signe contraire. On obtient alors une disposition analogue à celle de la *fig.* 8, construite dans l'hypothèse de $B < 0$ avec $A > 0$, quelle que soit d'ailleurs l'hypothèse faite sur n.

Si $N < 2n$, c'est le terme $-\frac{4B}{\varepsilon^N}$ qui donne son signe à la fonction $\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)^2$; enfin, si $N = 2n$, l'expression de $\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)^2$ devient

$$\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)^2 = \frac{A^2 - 4B + C\varepsilon}{\varepsilon^{2n}}.$$

La discussion de ces nouveaux cas se fait facilement : nous ne nous y arrêterons pas.

Nous n'avons envisagé jusqu'ici que l'hypothèse où deux racines au plus de l'équation (1) tendent vers zéro; nous n'examinerons pas le cas où un plus grand

nombre de racines tendent vers zéro. Nous avons indiqué dans un article précédent : *Sur la construction d'une courbe algébrique autour d'un de ses points* (*Nouvelles Annales*, 3e série, t. II), la marche à suivre dans ce cas.

On peut aussi, pour construire la courbe autour du pôle, chercher l'expression approchée des racines infiniment petites de l'équation (1), comme nous l'avons fait dans un autre travail : *Théorie des points singuliers dans les courbes algébriques* (*Nouvelles Annales*, 2e série, t. XIX et XX). Cette méthode s'applique sans modification au cas actuel : nous ne nous y arrêterons pas et nous allons passer au cas où il s'agit d'étudier la courbe autour d'un point autre que le pôle.

(*A suivre.*)

SUR QUELQUES COURBES ENVELOPPES;

PAR M. WEILL.

Considérons un point A qui décrit une courbe C, et faisons correspondre au point A une courbe F(A), qui dépende du point A seulement, mais non de la tangente en ce point à la courbe qu'il décrit; lorsque le point A décrit la courbe C, la courbe variable F(A) a une certaine enveloppe E.

Ceci posé, menons au point A la tangente à la courbe C, et soient A′, A″, ... diverses positions du point A sur cette tangente; à ces points correspondront des courbes F(A), F(A′), ... qui admettront une certaine enveloppe $\varphi(A)$; si l'on remplace le point A par le point B, et si l'on opère de même sur le point B, on aura une enveloppe $\varphi(B)$ correspondant aux courbes F(B),

$F(B')$, ..., obtenues en déplaçant le point B sur la tangente à la courbe C menée au point B.

D'après la définition de la courbe $F(A)$, on peut, pour avoir le point où cette courbe touche son enveloppe E, donner au point A un déplacement infiniment petit sur la courbe C, ou sur n'importe quelle courbe touchant la courbe C en ce point A; en particulier, sur la tangente au point A à la courbe C; dans ce dernier cas, on voit que le point où $F(A)$ touche son enveloppe E est un point commun aux deux courbes infiniment voisines $F(A)$, $F(A')$, et, par conséquent, appartient à la courbe $\varphi(A)$; donc, enfin, la courbe E est l'une des enveloppes des courbes φ.

Ce théorème très général a des applications nombreuses; nous nous bornerons à des cas très élémentaires.

Exemple I. — Étant données trois droites fixes OA, OB, AB, un point M variable sur AB est le sommet d'un parallélogramme OCMD dont les côtés sont parallèles à OA, OB; on sait que la diagonale CD a pour enveloppe une parabole tangente en A et B aux droites fixes OA, OB.

Supposons que, OA et OB restant fixes, AB se déplace en touchant une courbe fixe en un point M; quand le point M se meut sur cette courbe, la droite CD correspondante a pour enveloppe une courbe E. D'après le principe général, cette courbe E est l'une des enveloppes des paraboles variables tangentes aux droites fixes OA, OB aux points A et B où ces droites sont rencontrées par les tangentes AB à la courbe lieu de M. Appliquons ce résultat à quelques exemples.

Premier cas. — Les droites OA, OB étant rectangulaires, AB touche en M un cercle ayant son centre en O;

la droite CD a pour enveloppe une hypocycloïde à quatre rebroussements; en effet, elle est de longueur constante; donc la parabole qui touche OA, OB en A et B a pour enveloppe cette courbe; on peut remarquer que son sommet est le point où elle touche son enveloppe; donc son axe enveloppe une hypocycloïde à quatre rebroussements. De là, diverses réciproques.

Deuxième cas. — Les droites OA, OB étant rectangulaires ou obliques, AB enveloppe une hyperbole ayant pour asymptotes ces deux droites; les paraboles dont il s'agit ont pour enveloppe une hyperbole ayant les mêmes asymptotes; d'où, par transformation homographique, un théorème.

Troisième cas. — Les droites OA, OB sont l'axe et la tangente au sommet d'une parabole fixe, et AB est tangente à cette parabole; les paraboles dont il s'agit ont pour enveloppe une parabole, ayant même sommet et même axe que la première et un paramètre quadruple; d'où, par transformation homographique, un théorème.

Quatrième cas. — Les droites OA et OB sont une tangente à un cercle et le diamètre passant par le point de contact, les paraboles tangentes à ces deux droites fixes aux points où elles sont rencontrées par une tangente variable AB au cercle, ont pour enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements.

Exemple II. — Soit une courbe fixe C et un point fixe F; en un point M de la courbe C menons la tangente à cette courbe, et joignons F à un point variable A de la tangente, puis traçons la perpendiculaire AK à la droite AF. Lorsque le point A se meut sur la tangente, AK enveloppe une parabole ayant F pour foyer et la tangente comme tangente au sommet.

Lorsque le point M se déplace sur la courbe, les para-

boles correspondantes ont pour enveloppe la courbe enveloppe des perpendiculaires menées par les différents points M aux droites FM, FM′, etc. Applications :

Premier cas. — La tangente au sommet de nos paraboles variables enveloppe un cercle; l'enveloppe des paraboles est donc une conique ayant pour foyer F; on peut remarquer que le sommet a pour lieu un limaçon de Pascal ayant F pour point double. Ce théorème a diverses réciproques intéressantes.

Deuxième cas. — Des paraboles qui ont pour foyer le point double d'une strophoïde, et dont la tangente au sommet enveloppe cette courbe, ont pour enveloppe une parabole. La réciproque est la proposition suivante : Lorsqu'une parabole touche une parabole fixe et a pour foyer un point fixe pris sur la directrice, sa tangente au sommet enveloppe une strophoïde ayant ce point comme point double. Sans qu'il soit nécessaire d'insister, on voit que toute podaire négative donnera une enveloppe de paraboles.

Exemple III. — Revenant au problème de l'exemple I, supposons que l'enveloppe de CD soit une courbe connue, qu'elle touche en un point K; à une position de CD tangente en K, correspond une parabole tangente en A et B aux deux droites fixes OA, OB, le point M où la droite AB touche son enveloppe étant le sommet du parallélogramme ODMC; de plus, cette parabole touche en K la courbe enveloppe de CD; donc, de l'enveloppe des paraboles, on pourra déduire celle de la droite AB. En particulier, si l'enveloppe de CD, c'est-à-dire l'enveloppe de nos paraboles, est unicursale, il en sera de même de l'enveloppe de AB. Prenons les droites OA, OB comme axes coordonnés, et soit

$$px + qy - 1 = 0$$

l'équation de CD; on aura

$$f(p, q) = 0,$$

relation qui définira l'enveloppe de CD; l'enveloppe de AB aura pour équation

$$f\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) = 0.$$

Premier cas. — L'enveloppe de CD est une conique quelconque. L'enveloppe de AB est une courbe du quatrième degré ayant trois points doubles, dont deux à l'infini, le troisième au point O. On peut alors énoncer les deux théorèmes suivants :

Une courbe du quatrième ordre ayant trois points doubles A, B, C, *si l'on mène à cette courbe une tangente qui rencontre* AB *et* AC *en* P *et* Q, *une conique touchant* BC, *et touchant les droites* AB *et* AC *en* P *et* Q, *a pour quatrième enveloppe une conique.*

Une anallagmatique du quatrième ordre à point double étant donnée, une parabole qui a son foyer au point double de cette courbe, et pour tangente au sommet une tangente à cette courbe, a pour enveloppe une conique.

Deuxième cas. — L'enveloppe de CD est une conique qui touche en R et S les droites OA, OB. L'enveloppe de AB est alors une conique passant par R et S et ayant pour directions asymptotiques OA et OB. On en déduit le théorème suivant :

Lorsqu'une conique variable touche trois droites fixes OA, OB, PQ, *et une conique fixe tangente à* OA, OB *en* R, S, *la corde de contact* AB *de cette conique variable avec les droites fixes* OA, OB *a pour enveloppe une conique passant par* R, S *et par les points où la conique fixe rencontre* PQ.

Troisième cas. — L'enveloppe de CD est un cercle tangent aux deux droites rectangulaires OA, OB; le milieu de CD décrit alors une hyperbole ayant O pour foyer; par suite, AB enveloppe une hyperbole ayant O pour foyer; donc le foyer de la parabole qui touche OA et OB en A et B décrit un cercle, et l'on a le théorème :

Le lieu des foyers des paraboles qui touchent un cercle et deux droites rectangulaires tangentes à ce cercle est un cercle.

Exemple IV. — D'un point M d'une courbe abaissons sur deux droites rectangulaires fixes des perpendiculaires MP, MQ, et du point M la perpendiculaire MH sur PQ; lorsque M se déplace sur la tangente AMB à la courbe, MH enveloppe une parabole P_M qui touche en α, β les parallèles aux droites fixes menées par A et B, les points α, β étant sur la perpendiculaire abaissée du point O de rencontre des droites fixes sur la droite variable AB. Quand M se meut sur la courbe, les droites MH ont une enveloppe E; cette courbe est donc une des enveloppes des paraboles P_M. Soit

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} - 1 = 0$$

l'équation de la tangente en M à la courbe décrite par ce point; la parabole P_M a pour équation

$$(px + qy)^2 - 4pq(qx + py - pq) = 0;$$

p et q sont liés par une certaine relation $f(p, q) = 0$. L'enveloppe des paraboles se décomposera nécessairement, en général; car nous avons immédiatement une courbe qui fait partie de cette enveloppe et qui ne la constitue pas tout entière.

On voit que le théorème général établi plus haut se

traduit par une propriété analytique de décomposition de certains polynômes en facteurs, dont on aura des exemples aussi nombreux qu'on le voudra. Dans l'exemple actuel, les paraboles P_M ont pour enveloppes d'abord une courbe dépendant du lieu de M et qui est la courbe E, puis deux droites fixes qui sont les bissectrices de l'angle des deux droites rectangulaires fixes; ainsi la deuxième partie de l'enveloppe est indépendante de la courbe lieu de M; ce fait est général.

Exemple V. — On sait que, si un angle de grandeur constante tourne autour d'un point fixe, la corde interceptée par les côtés de l'angle sur deux droites fixes enveloppe une conique ayant pour foyer le point fixe; le lieu de la projection du point fixe sur cette corde est donc un cercle qui passe par les projections du point fixe sur les deux droites. Ceci posé, soit P un point fixe autour duquel nous ferons tourner un angle de grandeur constante, soit AB la corde interceptée par les côtés de l'angle sur une ou deux courbes fixes, A étant sur la courbe K, et B sur la courbe K'; menons en A et B les tangentes aux courbes K et K' respectivement et projetons le point P sur AB et sur ces deux tangentes, aux points M, R, R'.

Le cercle qui passe par M, R, R' sera tangent au point M au lieu des projections du point fixe P sur la droite AB se déplaçant suivant la loi indiquée. On connaîtra donc immédiatement une des enveloppes de ce cercle.

Ainsi, la courbe K étant une conique, A et B étant tous deux sur cette courbe et l'angle APB étant droit, le point M a pour lieu un cercle; donc le cercle MRR' aura pour une de ses enveloppes un cercle.

REMARQUE SUR CERTAINES QUESTIONS DE RÉCIPROCITÉ;

PAR M. C.-A. LAISANT,
Docteur ès sciences.

La question 1468, proposée par M. d'Ocagne (3e série, t. II, p. 384), l'avait été précédemment par moi dans le *Journal de Mathématiques élémentaires* (t. VI, 1882, p. 168), ainsi que le fait remarquer une *rectification* publiée depuis.

M. Moret-Blanc en a donné une solution (p. 523) qui est évidemment incomplète.

Cette question n'a certainement pas, par elle-même, une importance qui puisse justifier une réclamation quelconque de priorité, et je ne la rappellerais même pas en ce moment, si la solution ne se prêtait à une généralisation qui me parait digne de remarque.

Je reprends l'énoncé du *Journal de Mathématiques élémentaires*, plus concis que celui de M. d'Ocagne :

Quelles sont les heures auxquelles on peut faire permuter les deux aiguilles d'une horloge, de façon que la nouvelle position puisse se produire par le mouvement même de l'horloge?

Soit x l'une des heures cherchées. Prenons pour origine, sur le cadran, la position des aiguilles à midi, et pour unité l'heure elle-même, si bien que le tour du cadran tout entier est mesuré par 12.

La position de la petite aiguille est indiquée par x; si le nombre y indique la position de la grande aiguille, nous avons

$$(1) \qquad 12x = y + m.12.$$

Pour que la position résultant de la permutation résulte du mouvement même de l'horloge, c'est-à-dire réponde à une heure possible, il faut donc qu'on ait

$$(2) \qquad 12y = x + m.12.$$

Éliminant y entre ces deux relations, il vient

$$(3) \qquad 144x = x + m.12$$

ou

$$143x = m.12, \quad x = \frac{m.12}{143} = \frac{12k}{143}.$$

Pour obtenir toutes les heures cherchées, il faut donner à k les valeurs successives 0, 1, 2, 3, ..., 142, après quoi l'on retomberait dans les solutions déjà obtenues. Au fond, l'erreur de M. Moret-Blanc consiste à ne prendre pour ce coefficient k que onze valeurs entières 1, 14, 27, ..., 131, au lieu de 143.

Cette solution se prête à plusieurs remarques intéressantes.

Elle comprend, bien entendu, en particulier, les heures de *superposition* des aiguilles, obtenues en donnant à k les onze valeurs 0, 13, 26, 39, 52, 65, 78, 91, 104, 117, 130.

Quant aux 132 autres résultats, ils se correspondent deux à deux, et les valeurs *associées* de k, que nous appellerons k' et k'', sont telles que l'on a

$$k' \equiv 12k'' \pmod{143},$$

d'où, réciproquement,

$$k'' \equiv 12k' \pmod{143}.$$

Par exemple, à $k' = 34$ répondra $k'' = 122$. Ces deux valeurs donnent respectivement pour x, en faisant la conversion en heures et minutes,

$$2^h 51^m \frac{27}{143} \quad \text{et} \quad 10^h 14^m \frac{38}{143}.$$

Si donc une horloge marque $2^h 51^m \frac{27}{143}$ et si à ce moment l'on fait permuter les deux aiguilles, elle marquera exactement $10^h 14^m \frac{38}{143}$.

Si l'un des nombres k', k'' s'écrit $\alpha\beta$ dans le système de numération duodécimal, l'autre s'écrira $\beta\alpha$. Il s'ensuit nécessairement que les nombres associés à eux-mêmes sont ceux qui s'écrivent 11, 22, ..., c'est-à-dire 13, 26, ..., comme nous venons de le faire observer tout à l'heure.

La solution du problème est donnée, en somme, par la relation (3). Or cette relation est évidemment celle qui donnerait les heures de rencontre, sur un cadran, entre la petite aiguille et une autre marchant 144 fois aussi vite, c'est-à-dire 12 fois aussi vite que l'aiguille des minutes.

La question de réciprocité que nous nous sommes proposée se ramène donc à un simple problème de rencontre.

C'est cette dernière observation qui peut se généraliser d'une manière utile. Supposons une fonction $y = f(x)$ dépendant d'une variable *de même nature* x; si nous demandons de trouver les valeurs pour lesquelles x et y peuvent être permutées entre elles, tout en satisfaisant à la loi donnée, la question revient à résoudre le système d'équations

$$y = f(x),$$
$$x = f(y).$$

Mais on tire de là

$$x = f[f(x)] = f^2(x).$$

Telle est donc la solution du problème.

Or, si l'on demandait simplement pour quelles valeurs une fonction $z = \varphi(x)$ est égale à la variable indépen-

dante, on aurait pour solution

$$x = \varphi(x).$$

Donc les deux problèmes n'en font qu'un, si nous substituons à $\varphi(x)$ la fonction $f^2(x)$.

Les développements qui précèdent, sur la question 1468, ne représentent qu'un cas particulier de cette remarque générale sur les problèmes de réciprocité dont il s'agit.

Ces questions se prêtent d'elles-mêmes à des solutions graphiques presque évidentes, et sur lesquelles il nous semble inutile d'insister ici.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1405

(voir 3e série, t. II, p. 336);

PAR M. E. FAUQUEMBERGUE,
Professeur au lycée de Nice.

Si les racines d'une équation de degré pair $2m$ peuvent se partager en m groupes de deux racines x_1, x_2 satisfaisant à la relation

$$(1) \qquad a x_1 x_2 + b(x_1 + x_2) + c = 0,$$

on peut, par une substitution linéaire $x = \frac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta}$, amener l'équation à n'avoir que des termes de degré pair en y. (PELLET.)

De la relation entre x et y on déduit $y = \frac{\delta x - \beta}{\alpha - \gamma x}$; par suite, y_1 et y_2 étant les valeurs de y correspondant à x_1

et x_2, on a

$$y_1 = \frac{\delta x_1 - \beta}{\alpha - \gamma x_1}, \quad y_2 = \frac{\delta x_2 - \beta}{\alpha - \gamma x_2}.$$

Mais l'équation en y, ne devant avoir que des termes de degré pair, a ses racines égales deux à deux, et de signes contraires, ce qui exige

$$\frac{\delta x_1 - \beta}{\alpha - \gamma x_1} = - \frac{\delta x_2 - \beta}{\alpha - \gamma x_2}$$

ou

$$(2) \qquad 2\delta\gamma x_1 x_2 - (\alpha\delta + \beta\gamma)(x_1 + x_2) + 2\alpha\beta = 0.$$

Cette relation sera toujours satisfaite si nous l'identifions avec la relation (1). Pour cela, mettons-la d'abord sous la forme

$$2\frac{\delta}{\gamma} x_1 x_2 - \left(\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\frac{\delta}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma}\right)(x_1 + x_2) + 2\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\frac{\beta}{\gamma} = 0,$$

obtenue en divisant tous ses termes par γ^2. Comme α, β, γ, δ sont indéterminées, nous pouvons égaler leurs coefficients à ceux de la relation (1) :

$$2\frac{\delta}{\gamma} = a, \quad \frac{\alpha}{\gamma}\cdot\frac{\delta}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma} = -b, \quad 2\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\frac{\beta}{\gamma} = c.$$

La première équation donne

$$\frac{\delta}{\gamma} = \frac{a}{2};$$

la seconde devient alors

$$a\frac{\alpha}{\gamma} + 2\frac{\beta}{\gamma} = -2b;$$

et la troisième peut s'écrire

$$a\frac{\alpha}{\gamma} \times 2\frac{\beta}{\gamma} = ac.$$

Nous connaissons ainsi la somme et le produit de

$$a\frac{\alpha}{\gamma} \quad \text{et} \quad 2\frac{\beta}{\gamma}.$$

Ces deux quantités sont les racines de l'équation

$$U^2 + 2bU + ac = 0;$$

d'où

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\sqrt{b^2 - ac} - b}{a} \quad \text{et} \quad \frac{\beta}{\gamma} = \frac{-\left(\sqrt{b^2 - ac} + b\right)}{2}.$$

Portant ces valeurs dans l'expression de x, mise sous la forme

$$x = \frac{\frac{\alpha}{\gamma}y + \frac{\beta}{\gamma}}{y + \frac{\delta}{\gamma}},$$

on aura

$$x = \frac{2\left(\sqrt{b^2 - ac} - b\right)y - a\left(\sqrt{b^2 - ac} + b\right)}{2ay + a^2}.$$

Cette substitution répond à la question.

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.

Question 1436

(voir 3e série, t. I, p. 413).

On peut construire trois cercles osculateurs d'une parabole, qui touchent une tangente à cette courbe : démontrer que cette tangente et les tangentes aux points d'osculation touchent un même cercle.

(Laguerre.)

Soient

(1) $$Y^2 - 2pX = 0$$

l'équation d'une parabole, et

$$(2) \qquad X^2 + Y^2 + 2uX + 2vY + w = 0$$

celle d'un cercle quelconque. Les ordonnées des points communs aux deux courbes sont données par l'équation

$$(3) \qquad Y^4 + 4p(p+u)Y^2 + 8p^2vY + 4p^2w = 0,$$

obtenue en éliminant X entre les deux précédentes.

Soit y l'ordonnée d'un point de la parabole. En écrivant que y est racine triple de l'équation (3), on exprime que le cercle est osculateur à la parabole, puisque l'équation (1) qui fait connaître la valeur correspondante de x est du premier degré. On obtient ainsi les équations

$$y^4 + 4p(p+u)y^2 + 8p^2vy + 4p^2w = 0,$$
$$y^3 + 2p(p+u)y + 2p^2v = 0,$$
$$3y^2 + 2p(p+u) = 0.$$

De la dernière on tire u, de la deuxième v, et de la première w :

$$u = -p - \frac{3y^2}{2p}, \quad v = \frac{y^3}{p^2}, \quad w = -\frac{3y^4}{4p^2},$$

de sorte que l'équation du cercle osculateur au point y de la parabole est

$$X^2 + Y^2 - 2\left(p + \frac{3y^2}{2p}\right)X + 2\frac{y^3}{p^2}Y - \frac{3y^4}{4p^2} = 0,$$

ou, en mettant en évidence le centre et le rayon,

$$(4) \quad \left(X - p - \frac{3y^2}{2p}\right)^2 + \left(Y + \frac{y^3}{p^2}\right)^2 = \left(p + \frac{3y^2}{2p}\right)^2 + \frac{3y^4}{4p^2} + \frac{y^6}{p^4}.$$

Soit, en fonction de son coefficient angulaire,

$$(5) \qquad Y = mX + \frac{p}{2m}$$

l'équation d'une tangente déterminée à la parabole. Pour exprimer que le cercle (4) est tangent à cette droite, on écrit que la droite est à une distance du centre dont le carré est égal à celui du rayon. On a, pour déterminer les ordonnées des points d'osculation correspondants sur la parabole, l'équation

$$\frac{\left[\frac{y^3}{p^2}+m\left(p+\frac{3y^2}{2p}\right)+\frac{p}{2m}\right]^2}{1+m^2}=\left(p+\frac{3y^2}{2p}\right)^2+\frac{3y^4}{4p^2}+\frac{y^6}{p^4},$$

ou, en simplifiant,

$$y^6-3\frac{p}{m}y^5+3p^2\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{m^2}\right)y^4 \\ -\frac{p^3}{m}\left(2+\frac{1}{m^2}\right)y^3+\frac{3p^4}{2m^2}y^2-\frac{p^6}{4m^4}=0.$$

Parmi les racines de cette équation doit évidemment se trouver trois fois l'ordonnée $\frac{p}{m}$ du point de contact de la tangente (5) avec la parabole. En divisant trois fois de suite le premier membre de l'équation précédente par $y-\frac{p}{m}$, on obtient l'équation

$$y^3+\frac{3p^2}{4}y+\frac{p^3}{4m}=0,$$

dont les racines sont imaginaires. *Il y a donc trois cercles osculateurs imaginaires d'une parabole, qui touchent une tangente à cette courbe.*

Soient y_1, y_2, y_3 les ordonnées des trois points d'osculation. On a, entre ces ordonnées, les relations

$$(6)\qquad y_1+y_2+y_3=0,$$

$$(7)\qquad y_2y_3+y_3y_1+y_1y_2=0,$$

$$y_1y_2y_3=-\frac{p^3}{4m},$$

puis

$$(8)\qquad y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = -\frac{3p^2}{2},$$

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} & y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 = -\frac{3p^3}{4m}, \\ & y_1^4 + y_2^4 + y_3^4 = \frac{9p^4}{8}, \\ & y_2^2 y_3^2 + y_3^2 y_1^2 + y_1^2 y_2^2 = \frac{9p^4}{16}, \\ & y_2 y_3^2 + y_3 y_1^2 + y_1 y_2^2 + y_3 y_2^2 + y_1 y_3^2 + y_2 y_1^2 = \frac{3p^3}{4m}. \end{aligned}\right.$$

Les tangentes à la parabole en ces points auront pour équations

$$Y = \frac{p}{y_1} X + \frac{y_1}{2}, \quad Y = \frac{p}{y_2} X + \frac{y_2}{2}, \quad Y = \frac{p}{y_3} X + \frac{y_3}{2},$$

et l'équation générale des coniques tangentes à ces trois droites sera, en désignant par l_1, l_2, l_3 trois paramètres arbitraires,

$$\begin{aligned} & l_1^2 \left(Y - \frac{p}{y_1} X - \frac{y_1}{2}\right)^2 - 2 l_2 l_3 \left(Y - \frac{p}{y_2} X - \frac{y_2}{2}\right)\left(Y - \frac{p}{y_3} X - \frac{y_3}{2}\right) \\ + & l_2^2 \left(Y - \frac{p}{y_2} X - \frac{y_2}{2}\right)^2 - 2 l_3 l_1 \left(Y - \frac{p}{y_3} X - \frac{y_3}{2}\right)\left(Y - \frac{p}{y_1} X - \frac{y_1}{2}\right) \\ + & l_3^2 \left(Y - \frac{p}{y_3} X - \frac{y_3}{2}\right)^2 - 2 l_1 l_2 \left(Y - \frac{p}{y_1} X - \frac{y_1}{2}\right)\left(Y - \frac{p}{y_2} X - \frac{y_2}{2}\right) = 0. \end{aligned}$$

Le coefficient du terme en Y^2 est

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 - 2 l_2 l_3 - 2 l_3 l_1 - 2 l_1 l_2,$$

celui du terme en X^2 est

$$p^2 \left(\frac{l_1^2}{y_1^2} + \frac{l_2^2}{y_2^2} + \frac{l_3^2}{y_3^2} - 2\frac{l_2 l_3}{y_2 y_3} - 2\frac{l_3 l_1}{y_3 y_1} - 2\frac{l_1 l_2}{y_1 y_2}\right),$$

et celui du terme en XY est

$$\begin{aligned} 2p \Big[& -\frac{l_1^2}{y_1} - \frac{l_2^2}{y_2} - \frac{l_3^2}{y_3} + l_2 l_3 \left(\frac{1}{y_2} + \frac{1}{y_3}\right) \\ & + l_3 l_1 \left(\frac{1}{y_3} + \frac{1}{y_1}\right) + l_1 l_2 \left(\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2}\right)\Big]. \end{aligned}$$

Or on voit immédiatement, en tenant compte des équations (6), (7) et (8), que, en prenant $l_1 = y_1$, $l_2 = y_2$, $l_3 = y_3$, les deux premiers coefficients sont égaux et le troisième est nul, de sorte que, en remplaçant l_1, l_2, l_3 par ces valeurs dans l'équation générale, on a, pour l'équation du cercle tangent aux trois droites,

$$\begin{aligned} &-3p^2(X^2+Y^2)-p(y_1^2+y_2^2+y_3^2)X \\ &+(y_2y_3^2+y_3y_1^2+y_1y_2^2 \\ &\qquad +y_3y_2^2+y_1y_3^2+y_2y_1^2-y_1^3-y_2^3-y_3^3)Y \\ &\qquad +\tfrac{1}{4}(y_1^4+y_2^4+y_3^4)-\tfrac{1}{2}(y_2^2y_3^2+y_3^2y_1^2+y_1^2y_2^2)=0, \end{aligned}$$

ou, eu égard aux équations (8) et (9),

$$X^2+Y^2-\frac{p}{2}X-\frac{p}{2m}Y=0, \tag{10}$$

et, en mettant en évidence le centre et le rayon,

$$\left(X-\frac{p}{4}\right)^2+\left(Y-\frac{p}{4m}\right)^2=\frac{p^2(1+m^2)}{16m^2}.$$

En cherchant le carré de la distance du centre à la droite (5), on trouve

$$\frac{\left(\dfrac{p}{4m}-m\dfrac{p}{4}-\dfrac{p}{2m}\right)^2}{1+m^2}=\frac{p^2(1+m^2)}{16m^2},$$

ce qui démontre le théorème.

Le cercle (10) passe, quel que soit m, par le sommet et par le foyer de la parabole. Ch. B.

Note. — La même question a été résolue par M. Fulcrand.

Question 1457

(voir 3ᵉ série, t. II, p. 336);

PAR UN ANONYME.

Une hyperbole est tangente aux axes d'une ellipse, et les asymptotes de l'hyperbole sont tangentes à l'el-

lipse, prouver que le centre de l'hyperbole est sur l'un des diamètres conjugués égaux de l'ellipse.

(Wolstenholme.)

Soient

A, B les points de contact de l'hyperbole et des axes de l'ellipse, dirigés suivant les droites rectangulaires OX, OY;

A', B' les points auxquels les asymptotes CX', CY' de l'hyperbole sont tangentes à l'ellipse;

M, M' les milieux des cordes de contact AB, A'B' (¹).

Les centres de l'ellipse et de l'hyperbole étant, respectivement, O et C, la droite OC est un diamètre commun aux deux courbes, et ce diamètre passe par les points M, M', d'après cette proposition générale que le diamètre mené par le point de concours de deux tangentes à une conique divise la corde des contacts en deux parties égales.

La droite AB prolongée rencontrant les asymptotes CX', CY' de l'hyperbole en des points D, E, tels que AD = BE, le point M est le milieu de la droite DE, inscrite comme A'B' dans l'angle X'CY' des asymptotes. Il est facile d'en conclure que AB est parallèle à A'B'.

Actuellement remarquons que, le point M étant le milieu de l'hypoténuse AB du triangle rectangle AOB, les droites OM et AB sont également inclinées sur les axes OA, OB de l'ellipse, et, à cause du parallélisme des droites AB, A'B', il en est de même de OM' et A'B', c'est-à-dire du diamètre OC et de son conjugué. Donc *le centre, C, de l'hyperbole est sur l'un des diamètres conjugués égaux de l'ellipse.*

Note. — M. Juhel-Rénoy a donné une démonstration entièrement semblable; MM. Moret-Blanc, Ernest Barisien et J.-T., élève de Ma-

(¹) Le lecteur est prié de faire la figure.

thématiques spéciales, ont démontré la proposition au moyen des formules de la Géométrie analytique.

Question 1458

(voir 3e série, t. II, p. 336);

PAR M. MORET-BLANC.

Construire une parabole tangente à une circonférence donnée, connaissant l'axe et le paramètre de la parabole. (A.)

Il suffit de déterminer le point de contact; car la tangente et la normale communes à la circonférence détermineront sur l'axe un segment dont le milieu sera le foyer de la parabole : connaissant l'axe, le foyer et le paramètre, on pourra construire la courbe par les procédés connus.

Prenons pour axes des x et des y l'axe de la parabole et sa perpendiculaire passant par le centre de la circonférence. Il est évident qu'à toute solution correspondra une autre solution symétrique par rapport à l'axe des y : il suffit donc de considérer les paraboles ayant leur axe dirigé dans un sens déterminé que nous prendrons pour celui des abscisses positives.

Soient

p le paramètre donné;
β l'ordonnée du centre;
r le rayon du cercle;
x et y les coordonnées du point de contact de la parabole et de la circonférence.

Les triangles rectangles semblables donnent, la sousnormale étant égale à p,

$$\frac{y}{p} = \frac{\beta}{x+p},$$

d'où

$$y(x+p) = p\beta,$$

équation d'une hyperbole équilatère ayant pour asymptotes les droites $y = 0$ et $x = -p$, et passant par le centre de la circonférence : il est donc facile d'en construire la partie utile ; mais on peut opérer plus rapidement. Si l'on fait tourner autour du centre C de la circonférence une règle divisée, on déterminera les deux positions de la règle où la portion comprise entre le point C et l'une des asymptotes est égale à la partie comprise entre le second point situé sur la circonférence et l'autre asymptote : les deux points de la circonférence ainsi déterminés seront les points de contact cherchés.

Note. — La même question a été résolue par MM. Renoy et Ernest Barisien, lieutenant au 141e de ligne, à Bastia.

Question 1467

(voir 3e série, t. II, p. 384);

PAR M. MORET-BLANC.

Le nombre premier $p = 2n+1$ étant supérieur à 3, la somme des puissances d'un même degré pair $2a$ comprise entre 0 et $p-1 = 2n$, des n entiers 1, 2, 3, ..., n et celle des puissances du même degré des n entiers suivant $n+1, n+2, \ldots, p-1 = 2n$ sont divisibles par p. (LIONNET.)

1° m étant un nombre entier inférieur à $p-1 = 2n$, la somme des puissances de degré m des $2n$ entiers 1, 2, 3, ..., $2n$ est divisible par le nombre premier $p = 2n+1$.

En effet, S_m désignant la somme des puissances de degré m, des $2n$ premiers nombres, on a, pour détermi-

ner S_m, la formule connue

$$(2n+1)[(2n+1)^m - 1] = \frac{m+1}{1} S_m$$
$$+ \frac{(m+1)m}{1.2} S_{m-1} + \ldots + \frac{(m+1)m}{1.2} S_2 + \frac{m+1}{1} S_1,$$

qui montre que, si $2n+1$ divise S_1, S_2, ..., S_{m-1}, il divisera aussi $(m+1)S_m$, et, par suite, S_m, puisque $m+1$ est plus petit que le nombre premier $2n+1$.

Or $2n+1$ divise $S_1 = n(2n+1)$: donc il divise aussi $S_2, S_3, \ldots, S_{m-1}, S_m$.

2° La différence entre la somme des puissances, d'un même degré pair $2a$, des n nombres 1, 2, 3, ..., n et celle des puissances du même degré des n nombres suivants $n+1, n+2, \ldots, 2n$ est divisible par $p = 2n+1$.

Appelons s_{2a} et s'_{2a} ces deux sommes ; on a

$$s'_{2a} - s_{2a} = [(2n)^{2a} - 1^{2a}]$$
$$+[(2n-1)^{2a} - 2^{2a}] + \ldots + [(n+1)^{2a} - n^{2a}].$$

La différence des puissances, d'un même degré pair, de deux nombres entiers étant toujours divisible par la somme de ces nombres, chacune des différences du second membre est divisible par $2n+1$; donc

$$s'_{2a} - s_{2a}$$

est divisible par $2n+1 = p$.

Or, si $2a$ est plus petit que $2n$, on a vu que

$$S_{2a} = s'_{2a} + s_{2a}$$

est aussi divisible par p ; donc chacune des sommes s_{2a} et s'_{2a} est aussi divisible par p. C. Q. F. D.

Question 1473

(voir 3e série, t. II, p. 383);

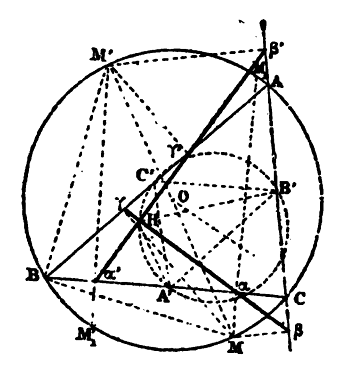
PAR M. N. GOFFART.

THÉORÈME I. — *Les deux droites de Simson, relatives à deux points diamétralement opposés, sont rectangulaires.*

THÉORÈME II. — *Le lieu du point de concours des deux droites de Simson, relatives à deux points diamétralement opposés, est le cercle des neuf points* (¹).

(N. GOFFART.)

Soient A, B, C les sommets du triangle; M, M′ les extrémités d'un diamètre de la circonférence circon-



scrite; $M\alpha$, $M\beta$, $M\gamma$, et $M'\alpha'$, $M'\beta'$, $M'\gamma'$ les perpendiculaires abaissées respectivement sur les côtés BC, CA, AB, des deux points M et M′. Soit encore H le point de concours des droites $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$.

(¹) On m'a écrit, de Londres, que ces deux théorèmes ont été, il y a quelques années, démontrés en Angleterre et en Allemagne; cela ne me fait pas regretter d'en avoir demandé la démonstration aux lecteurs des *Nouvelles Annales*.

Désignons par M_1 et M'_1 les points où les droites $M\alpha$, $M'\alpha'$ perpendiculaires à BC rencontrent la circonférence. On voit immédiatement que le quadrilatère $MM_1M'M'_1$ est un rectangle inscrit, et que par suite $\alpha C = \alpha' B$. Donc, si A' est le milieu de BC, c'est aussi le milieu de $\alpha\alpha'$ (¹). Pareillement, on peut poser que B', C' sont respectivement les milieux de $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$. Il en résulte encore

$$\text{arc } CM = BM'_1$$

et, par suite,

$$\text{angle } CM_1M = BM'M'_1 = CBM.$$

1° Le quadrilatère $M\alpha\gamma B$ étant inscriptible,

$$\text{angle } M\gamma\alpha = CBM.$$

De même $M'\alpha'\gamma' B$ est inscriptible, donc

$$\text{angle } B\gamma'\alpha' = \beta'\gamma' A = BM'M'_1\,;$$

donc

$$M\gamma\alpha = \beta'\gamma' A.$$

Comme, d'ailleurs, les angles $\gamma M\beta$ et $\gamma' A\beta'$ sont supplémentaires de l'angle BAC, les triangles $\gamma M\beta$, $\gamma' A\beta'$ sont équiangles. Les côtés $M\beta$, $M\gamma$ étant respectivement perpendiculaires à $A\beta'$, $A\gamma'$, il en est de même de $\beta\gamma$ et $\beta'\gamma'$. Donc les droites $\alpha\beta\gamma$ et $\alpha'\beta'\gamma'$ sont rectangulaires.

2° Les triangles $\alpha H\alpha'$, $\beta H\beta'$, $\gamma H\gamma'$ étant rectangles, on a

$$HA' = \tfrac{1}{2}\alpha\alpha' = A'\alpha \quad \text{et} \quad HB' = \tfrac{1}{2}\beta\beta' = \beta B'.$$

Il s'ensuit

$$\text{angle } A'H\alpha = A'\alpha H = C\alpha\beta,$$
$$\text{angle } B'H\beta = H\beta B' = C\beta\alpha.$$

En additionnant, il vient

$$A'HB' = ACB = A'C'B'.$$

(¹) A', étant la projection du milieu O de MM' sur BC, est nécessairement le milieu de la projection $\alpha\alpha'$ de MM' sur la même droite BC.

Ainsi le lieu du point H est le segment capable de l'angle A′C′B′ décrit sur A′B′; c'est la circonférence circonscrite au triangle A′B′C′, ou le cercle des neuf points.

Note. — La même question a été résolue par M. Jean Kartchewski, maître de l'École réale à Themirkhan-Choura (Caucase); et par MM. Droz; Moret-Blanc; Terrier; Bricard, à Vannes; J. Chapson, aspirant-répétiteur au lycée de Versailles.

QUESTIONS.

1495. Le nombre total des solutions entières, non négatives, des équations

$$\begin{aligned} x+\ 4y &= 3(n-1),\\ 4x+\ 9y &= 5(n-2),\\ 9x+16y &= 7(n-3),\\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

est égal à n. (ERNEST CESARO.)

1496. Une ellipse et une hyperbole sont telles que les asymptotes de l'hyperbole sont deux diamètres conjugués de l'ellipse; prouver qu'en faisant un choix convenable d'axes de coordonnées on pourra donner respectivement aux équations des deux courbes les formes

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{et} \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=m.$$

(WOLSTENHOLME.)

1497. Étant données deux droites fixes, on considère deux cercles de même rayon, tangents entre eux, et touchant chacun une des deux droites.

Le point commun à l'un des cercles et à la droite correspondante étant fixe, on demande le lieu du point de contact des deux cercles, lorsqu'on fait varier leur rayon. (D'OCAGNE.)

1498. On donne deux droites fixes passant au point O, et une droite AB de longueur constante glisse sur ces deux droites. Démontrer que le lieu du centre du cercle des neuf points du triangle AOB est une ellipse; le cercle des neuf points a pour enveloppe une courbe parallèle à l'ellipse.

Trouver le théorème réciproque. (WEILL.)

1499. On donne l'arête de base et la hauteur d'une pyramide régulière dont la base est un carré. Trouver l'angle compris entre deux faces latérales.

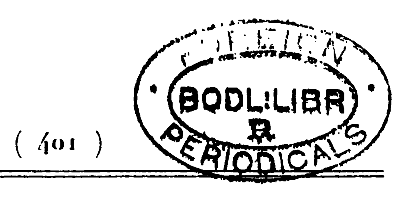
(M. GENEIX-MARTIN.)

1500. Les projections orthogonales d'un point quelconque d'une hyperbole équilatère sur les côtés d'un triangle inscrit déterminent une circonférence qui passe par le centre de la courbe. (P. TERRIER.)

1501. Par le sommet A d'un triangle ABC on mène des perpendiculaires aux côtés AB, AC, qui rencontrent en D et E la circonférence circonscrite au triangle. Démontrer que le quadrilatère ADBE (ou ADCE) est équivalent au triangle. (B. REYNOLDS, M. A.)

(Extrait du Journal anglais *The educational Times,* juillet 1884.)

1502. On donne dans l'espace deux droites A et B. Une hyperbole H doit avoir la droite A pour directrice et être un méridien d'une surface gauche de révolution contenant la droite B. On demande le lieu du foyer de H, correspondant à la directrice A. (HALPHEN.)



SUR LES QUADRILATÈRES QUI ONT LEURS SIX SOMMETS SUR UNE CUBIQUE;

PAR M. WEILL.

Considérons une conique fixe et quatre points A, B, C, D dans son plan. Par ces quatre points, faisons passer une conique variable qui rencontre la conique fixe en quatre points P, Q, R, S. Les six droites qui joignent ces quatre points deux à deux ont pour enveloppe une courbe de troisième classe; en effet, par un point quelconque P de la conique fixe passent trois droites tangentes à l'enveloppe. Soient deux quadrilatères PQRS, P'Q'R'S'; si l'on a pris *au hasard* deux couples de quatre points PQRS, P'Q'R'S' sur la conique fixe, et si l'on fait passer par les quatre premiers points une conique quelconque, et par les quatre autres une autre conique quelconque, ces deux coniques se couperont en quatre points α, β, γ, δ. Ces quatre derniers points seront les points de base d'un faisceau de coniques qui détermineront sur la conique fixe des groupes de quatre points, dont feront partie les groupes PQRS, P'Q'R'S'. On peut alors énoncer les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME I. — *Si l'on considère sur une conique deux groupes de quatre points, les côtés et les diagonales des deux quadrilatères qui ont ces points pour sommets sont douze droites tangentes à une même courbe de troisième classe.*

THÉORÈME II. — *Deux quadrilatères quelconques étant circonscrits à une conique, leurs douze sommets sont sur une même cubique.*

D'une manière générale, considérons les m^2 points de base d'un faisceau de courbes du degré m; une courbe du faisceau rencontre la conique en $2m$ points, et les droites qui joignent ces points deux à deux enveloppent une courbe de la classe $2m-1$. On a donc les deux théorèmes suivants :

Théorème III. — *Étant donnés deux groupes de $2m$ points sur une conique, les droites qui joignent entre eux deux à deux les $2m$ points de chaque groupe sont tangentes à une même courbe de la classe $2m-1$.*

Théorème IV. — *Deux polygones quelconques de $2m$ côtés étant circonscrits à une conique, leurs sommets, au nombre de $2m(2m-1)$ sont sur une même courbe d'ordre $2m-1$.*

Ce dernier théorème est dû à M. Darboux, qui l'a établi par des considérations différentes (*Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces,* p. 189). Revenons à la conique fixe et aux m^2 points de base du faisceau de courbes d'ordre m; à ces points fixes est liée la courbe de classe $(2m-1)$ dont il est question plus haut; mais, si l'on donne cette courbe, les points de base ne sont pas complètement déterminés. En effet, prenons, pour être plus clair, le cas de quatre points de base et d'un faisceau correspondant de coniques; deux coniques du faisceau déterminent sur la conique fixe deux couples de quatre points PQRS, P'Q'R'S'. Si par les quatre premiers nous faisons passer une conique *quelconque,* et, de même, par les quatre autres, ces deux nouvelles coniques se couperont en quatre points α, β, γ, δ, qui pourront être substitués aux quatre points primitifs ABCD. Nous dirons que ces deux groupes de quatre points ABCD, $\alpha\beta\gamma\delta$ sont *équivalents.*

Cherchons les relations qui existent entre ces deux groupes équivalents.

Pour cela, considérons, en général, trois courbes du degré m, ayant pour équations $U = 0$, $V = 0$, $W = 0$. Soient $U + \lambda V = 0$, $U + \mu W = 0$ les équations de deux autres courbes de même degré, on a l'identité

$$U + \lambda V - (U + \mu W) = \lambda V - \mu W.$$

De cette identité résulte le théorème suivant :

Théorème V. — *Étant données trois courbes de même degré; si par les points communs à la première et à la deuxième on fait passer une courbe du même degré, puis une autre courbe du même degré par les points communs à la première et à la troisième, il existe une courbe du même degré passant par les points communs à ces deux nouvelles courbes, et par les points communs à la deuxième et à la troisième des courbes primitives.*

En appliquant ce théorème au cas particulier du second degré, on voit que les deux groupes équivalents formés par les quatre points A, B, C, D et les quatre points α, β, γ, δ constituent huit points d'une même conique; de plus, les douze droites obtenues en joignant deux à deux entre eux les points de chaque groupe touchent la courbe de troisième classe qui a été considérée plus haut. Par suite, on peut énoncer les théorèmes suivants :

Théorème VI. — *Étant donnés une conique* K *et quatre points* A, B, C, D, *si l'on mène par les quatre points une conique* K′ *qui rencontre la première en* PQRS, *et une conique* K″ *rencontrant la première en* P′Q′R′S′, *et enfin par les quatre points* P, Q, R, S *et*

les quatre points P′, Q′, R′, S′, *deux coniques quelconques se coupant en* αβγδ :

1° *Les huit points* A, B, C, D, α, β, γ, δ *appartiennent à une même conique* K‴;

2° *Deux quelconques des quatre groupes de quatre points sont équivalents entre eux, relativement à la conique qui contient les deux autres groupes;*

3° *Toutes les droites obtenues en joignant entre eux deux à deux les points d'un même groupe sont tangentes à une même courbe de troisième classe;*

4° *Par un point quelconque du plan passent trois droites appartenant à un groupe équivalent à l'un des groupes obtenus; ce groupe s'obtiendra par l'intersection de deux coniques, et le problème des tangentes à mener par un point du plan à la courbe de troisième classe est ramené à trouver les points communs à deux coniques passant par le point considéré.*

Théorème VII. — *Corrélatif du précédent.*

L'enveloppe de troisième classe, dont il est question, peut se décomposer en un point et une conique; on se trouve alors dans le cas où le quadrilatère variable PQRS reste inscrit et circonscrit à deux coniques fixes. On a alors le théorème suivant :

Théorème VIII. — *Étant donnés deux quadrilatères* PQRS, P′Q′R′S′ *inscrits à une conique* H, *et circonscrits à une conique* K, *si l'on mène par les quatre points* P, Q, R, S *une conique quelconque* L, *et par les quatre points* P′, Q′, R′, S′ *une autre conique quelconque* L, *ces deux coniques se coupent en quatre points* α, β, γ, δ *formant un quadrilatère circonscrit à la conique* K.

Les théorèmes précédents ont de nombreuses conséquences sur lesquelles nous n'insisterons pas.

Théorème IX. — *Si par trois points fixes* A, B, C, *et par les sommets d'un hexagone inscrit et circonscrit à deux coniques fixes, on fait passer une cubique, cette courbe passe par six autres points fixes, lorsque l'hexagone se déplace.*

En effet, par un point pris sur la conique circonscrite aux polygones, on ne peut faire passer qu'une seule cubique du système; donc ces cubiques forment un faisceau.

Si les trois points fixes A, B, C sont en ligne droite, les six autres points fixes sont sur une conique.

Théorème X. — *Si par six points fixes et les sommets variables d'un octogone inscrit et circonscrit à deux coniques fixes on fait passer une courbe du quatrième degré, elle passe par dix autres points fixes.*

On voit facilement quel est le théorème général; si l'on veut énoncer des théorèmes de même genre relatifs à des polygones inscrits et circonscrits d'un nombre impair de côtés, il suffit de joindre aux points fixes un autre point fixe pris sur la conique à laquelle le polygone reste inscrit.

Théorème XI. — *Si par cinq points fixes, dont deux situés sur une conique* K, *et les sommets variables d'un quadrilatère inscrit à la conique* K *et circonscrit à une conique fixe, on fait passer une cubique, cette courbe passe par quatre autres points fixes.*

Plus généralement, au lieu du quadrilatère variable inscrit à la conique K et circonscrit à une autre conique fixe, on peut prendre le quadrilatère déterminé sur la conique K par des coniques variables formant un fais-

ceau. On peut facilement étendre ces théorèmes ; nous y reviendrons.

Reprenons le théorème relatif aux deux quadrilatères circonscrits à une même conique, et dont les douze sommets sont sur une cubique, et proposons-nous la question réciproque : Étant donnée une cubique, construire des quadrilatères dont les six sommets soient sur la courbe. Soit une droite quelconque rencontrant la cubique en A, B, C; on voit immédiatement qu'on peut construire un nombre limité de quadrilatères dont les six sommets soient sur la cubique, trois d'entre eux étant les points A, B, C; on peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème XII. — *Étant donnée une cubique quelconque, il existe une double infinité de quadrilatères dont les six sommets sont sur la courbe.*

Si, d'un point pris sur la cubique, on mène à la courbe les quatre tangentes, on sait, d'après des théorèmes dus à Maclaurin, que les quatre points de contact forment un quadrilatère dont les six sommets et le point de concours des deux diagonales sont sur la courbe; mais on voit que ces quadrilatères sont en nombre simplement infini; ils forment une classe spéciale de nos quadrilatères : aucun de leurs côtés ne peut être pris au hasard; ces droites ont une enveloppe qui a été beaucoup étudiée.

Soient A, B, C, D, E, F les six sommets d'un quadrilatère inscrit à la cubique, ABC étant une droite choisie arbitrairement; inscrivons une conique S dans ce quadrilatère, et soit L une tangente quelconque à cette conique, laquelle rencontre la cubique en trois points G, H, K; les neuf points A, B, C, D, E, F, G, H, K ne sont pas les points de base d'un faisceau de cubiques, car, les

huit points A, B, C, D, E, F, G, H étant donnés, le neuvième point de base du faisceau de cubiques n'est autre que le point R où viennent se rencontrer les tangentes menées par G et H à la conique S. Ceci posé, soient G, H, K, L, M, N les six sommets du quadrilatère circonscrit à la conique S et ayant G, H, K pour trois de ses sommets; ces six points seront sur la cubique, en vertu des théorèmes précédents. On a donc les résultats que nous allons énoncer :

Théorème XIII. — *Étant donné un quadrilatère dont les six sommets sont sur une cubique, une conique inscrite dans ce quadrilatère sera, de même, inscrite à une suite de quadrilatères ayant tous leurs six sommets sur la cubique.*

Théorème XIV. — *Étant donnés deux quadrilatères dont les douze sommets sont sur une cubique, leurs huit côtés sont tangents à une même conique.*

Si d'un point A pris sur la cubique nous menons à cette courbe deux tangentes dont les points de contact soient B et C, et si la droite BC rencontre la cubique en D, une conique qui touchera cette droite en D et qui touchera en des points, d'ailleurs quelconques, les deux droites AB et AC, sera l'une des coniques S que nous avons considérées; en effet, le quadrilatère dont les quatre côtés sont la droite double DBC et les deux droites AB, AC répond à la définition. On a, par suite, le théorème :

Théorème XV. — *Si la tangente à une conique en un point* D *commun à cette conique et à une cubique rencontre la cubique en deux points* B *et* C, *tels que les tangentes en* B *et* C *à la cubique se coupent en* A *sur*

cette courbe et soient, en outre, tangentes à la conique, les mêmes propriétés auront lieu pour les cinq autres points D′, D″,..., *où la conique rencontre encore la cubique.*

Remarquons que les coniques S dont il s'agit sont en nombre doublement infini. En prenant pour côtés d'un triangle de référence les droites AB, AC, BC, les équations de la cubique et de la conique S seront

$$\alpha\beta(l\alpha - m\beta) + A\alpha\beta\gamma + \gamma^2(B\alpha + C\beta) = 0,$$
$$l^2\alpha^2 + m^2\beta^2 + p^2\gamma^2 - 2lm\,\alpha\beta - 2lp\,\alpha\gamma - 2mp\,\beta\gamma = 0.$$

Supposons tracées les deux tangentes AB et AC partant du point A de la cubique, ainsi que la droite BC qui rencontre la cubique en D; soit M un point quelconque de la cubique; proposons-nous de mener par M une droite rencontrant la cubique en deux points, B′ et C′, tels que les tangentes à la cubique en ces points concourent sur la courbe; le théorème précédent permet de résoudre immédiatement ce problème; il suffit, en effet, de faire passer par le point M une conique S qui touche AB, AC, et, en outre, la droite BC au point D; la tangente menée par le point M à cette conique répond à la question.

Considérons un quadrilatère et deux points P, Q, et proposons-nous de trouver le lieu des points de rencontre des tangentes menées par P et Q à toutes les coniques inscrites au quadrilatère; il est facile de voir que ce lieu est une cubique passant par les six sommets du quadrilatère et par les points P et Q; parmi les coniques inscrites au quadrilatère, il en est une qui touche la droite PQ en un point R qui fait partie du lieu; la cubique est donc déterminée par ces neuf points qui sont distincts, à savoir : les six sommets du quadrilatère et les trois points P, Q, R en ligne droite. Supposons mainte-

nant la cubique donnée, et cherchons à retrouver son mode de génération; la cubique étant donnée quelconque, considérons un des quadrilatères étudiés précédemment et qui ont leurs six sommets sur cette cubique; inscrivons une conique à ce quadrilatère, et menons à cette conique une tangente qui rencontre la cubique en PQR, R étant un point commun à la cubique et à la conique; le lieu des points où se rencontrent les tangentes menées par P et Q aux coniques inscrites au quadrilatère est la cubique donnée; on voit qu'à chaque quadrilatère inscrit à la cubique correspondent six modes de génération de cette courbe; les quadrilatères qu'on peut prendre sont, d'ailleurs, en nombre doublement infini. Supposons que P et Q soient les ombilics du plan; dans ce cas, la cubique est une cubique circulaire, lieu des foyers des coniques inscrites dans un quadrilatère. Soit une cubique circulaire donnée, et considérons un quadrilatère, d'ailleurs quelconque, ayant ses six sommets sur la cubique; inscrivons à ce quadrilatère une parabole tangente en un point R à la droite de l'infini : on voit que cette parabole aura pour foyer le *foyer double* réel de la cubique circulaire, et pour axe la parallèle menée par ce foyer à l'asymptote de la cubique; on pourra toujours tracer une parabole assujettie à ces trois conditions simples et devant, en outre, toucher une droite quelconque; une telle parabole sera inscrite à un quadrilatère *aplati* inscrit à la cubique circulaire; donc, toute tangente à cette parabole sera un côté d'un quadrilatère circonscrit à la parabole et inscrit à la cubique. Il en résulte les théorèmes suivants :

Théorème XVI. — *Une cubique quelconque étant donnée, il existe six séries doublement infinies de*

modes de génération de cette courbe comme lieu des points de rencontre des tangentes menées par deux points fixes aux coniques inscrites à un quadrilatère.

THÉORÈME XVII. — *Une cubique circulaire étant donnée, il existe une série doublement infinie de modes de génération de cette courbe comme lieu des foyers des coniques inscrites à un quadrilatère, pourvu que le foyer double de cette cubique soit sur la courbe.*

THÉORÈME XVIII. — *Étant donnés une cubique circulaire passant par son foyer double, et un quadrilatère quelconque dont les six sommets sont sur la courbe, la parabole inscrite à ce quadrilatère aura pour foyer le foyer double de la courbe, et pour axe la parallèle à l'asymptote de la cubique menée par son foyer; la tangente à cette parabole en l'un des cinq points où elle rencontre la cubique rencontre cette courbe en deux autres points tels que les tangentes à la cubique en ces points touchent la conique et se coupent sur la cubique.*

ÉTUDE DE DEUX SYSTÈMES SIMPLES DE COORDONNÉES TANGENTIELLES DANS LE PLAN : COORDONNÉES PARALLÈLES ET COORDONNÉES AXIALES (1);

PAR M. MAURICE D'OCAGNE,
Élève-Ingénieur des Ponts et Chaussées.

1. L'étude que nous allons présenter se rapporte à la Géométrie plane.

---

(1) Rappelons ici que les coordonnées tangentielles que Clebsch appelle les *coordonnées lignes* sont les inverses de l'abscisse et de

Nous avons choisi, parmi les très nombreux systèmes de coordonnées tangentielles que l'on peut considérer, les deux qui nous ont paru les plus simples, l'un correspondant aux coordonnées rectilignes ordinaires, l'autre aux coordonnées polaires, et nous les avons étudiés avec quelque détail; ce travail, où se trouvent exposés nos principaux résultats, constitue donc, pour ainsi dire, l'esquisse d'un Traité de Géométrie analytique fondé sur l'emploi des coordonnées spéciales que nous envisageons. Aussi n'insistons-nous que sur les points où ces coordonnées offrent quelque particularité, laissant de côté les propriétés communes à tous les systèmes de coordonnées tangentielles, qui ont souvent été exposées et que chacun connaît.

Cette étude nous a en outre conduit à une méthode de transformation géométrique qui est exposée dans les §§ IX et X.

Qu'il nous soit enfin permis d'attirer l'attention du lecteur sur la courbe dont l'étude assez détaillée fait l'objet du n° 50, et qui donnera lieu, sans doute, à de nouvelles remarques.

COORDONNÉES PARALLÈLES.

I. — Coordonnées de la droite.

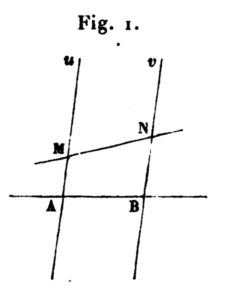
2. On donne deux points A et B, dits *origines des coordonnées*, et, par ces points, deux droites parallèles Au et Bv, dites *axes des coordonnées* (*fig.* 1).

---

l'ordonnée à l'origine d'une droite rapportée à deux axes concourant, Ox et Oy; on les désigne d'habitude par les lettres u et v; les coordonnées que nous désignons plus loin par ces deux lettres sont différentes des précédentes.

On porte sur les axes des segments $AM = u$ et

Fig. 1.

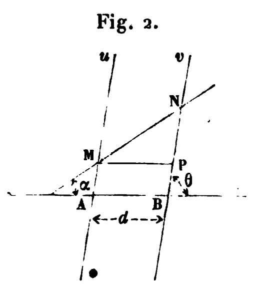


$BN = v$, comptés positivement dans le sens de A vers u, et de B vers v, et négativement dans l'autre sens. On détermine ainsi deux points M et N. Les longueurs u et v, prises avec leurs signes, seront dites les *coordonnées de la droite* MN.

3. *Angle d'une droite quelconque avec l'axe* AB *des origines.* — Les constantes particulières à chaque système de coordonnées sont l'angle θ que les axes de coordonnées font avec l'axe des origines, et la distance d de ces origines.

Voyons comment, en fonction de ces quantités et des coordonnées u et v d'une droite, s'exprime l'angle α que fait cette droite avec l'axe des origines.

Fig. 2.



Menant par le point M (*fig.* 2) la parallèle MP à AB,

on a

$$\frac{\sin \mathrm{NMP}}{\sin \mathrm{MNP}} = \frac{\mathrm{NP}}{\mathrm{MP}} \quad \text{ou} \quad \frac{\sin \alpha}{\sin(\theta - \alpha)} = \frac{v - u}{d},$$

d'où l'on tire aisément

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{tang} \alpha = \frac{(v - u) \sin \theta}{d + (v - u) \cos \theta}.$$

4. *Angle de deux droites.* — α et α' étant les angles que ces droites font respectivement avec l'axe AB, on a

$$\mathrm{V} = \alpha' - \alpha.$$

Appliquant alors la formule

$$\operatorname{tang} \mathrm{V} = \frac{\operatorname{tang} \alpha' - \operatorname{tang} \alpha}{1 + \operatorname{tang} \alpha' \operatorname{tang} \alpha},$$

on trouve

$$\text{(2)} \quad \operatorname{tang} \mathrm{V} = \frac{d[(v' - u') - (v - u)] \sin \theta}{d^2 + (v' - u')(v - u) + d[(v' - u') + (v - u)] \cos \theta}.$$

La condition de parallélisme de deux droites est donc

$$\text{(3)} \qquad v' - u' = v - u,$$

ce qui était évident *a priori*, et la condition de perpendicularité,

$$\text{(4)} \quad d^2 + (v' - u')(v - u) + d[(v' - u') + (v - u)] \cos \theta = 0;$$

si l'angle θ est droit, cette dernière condition se réduit à

$$\text{(4')} \qquad d^2 + (v' - u')(v - u) = 0.$$

5. *Droite moyenne.* — Étant données des droites (u_1, v_1), (u_2, v_2), ..., (u_m, v_m) en nombre quelconque m, nous appellerons *droite moyenne* de ces m droites celle dont les coordonnées sont

$$\frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_m}{m} \quad \text{et} \quad \frac{v_1 + v_2 + \ldots + v_m}{m}.$$

On voit que cette droite (D) est telle que, si une sécante

parallèle aux axes la coupe au point D et coupe les droites données aux points $D_1, D_2, \ldots, D_m$, le point D est le centre des moyennes distances des points $D_1, D_2, \ldots, D_m$. Nous exprimerons ce fait en disant que la droite (D) est *moyenne* des droites données par rapport à la direction de cette sécante.

Transformation des coordonnées.

6. *Changement de l'axe des origines.* — On prend pour nouvel axe des origines une droite A_1B_1, déterminée par ses coordonnées $AA_1 = a$ et $BB_1 = b$. Les formules de transformation sont, dans ce cas,

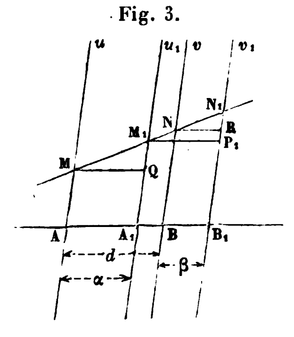
$$u = u_1 + a, \tag{5}$$

$$v = v_1 + b, \tag{5'}$$

u et v étant les coordonnées d'une droite rapportée aux origines A, B, et u_1 et v_1 les coordonnées de la même droite rapportée aux origines A_1 et B_1.

7. *Changement des axes de coordonnées parallèlement à eux-mêmes, en conservant le même axe des origines.* — Soient Au et Bv les anciens axes, A_1u_1 et B_1v_1 les nouveaux (*fig.* 3).

Fig. 3.



Appelons α la distance de Au et A_1u_1, comptée paral-

lèlement à AB et β la distance de Bv et $B_1 v_1$. La similitude des triangles MM_1Q, NN_1R et $M_1N_1P_1$ donne

$$\frac{u_1 - u}{\alpha} = \frac{v_1 - v}{\beta} = \frac{v_1 - u_1}{d + \beta - \alpha},$$

d'où l'on tire

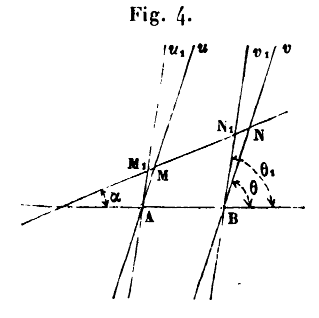
$$u = \frac{(d + \beta)u_1 - \alpha v_1}{d + \beta - \alpha} \tag{6}$$

et

$$v = \frac{(d - \alpha)v_1 + \beta u_1}{d + \beta - \alpha}. \tag{6'}$$

8. *Changement des axes de coordonnées dans une direction quelconque, en conservant les mêmes origines.* — Soient Au et Bv les anciens axes, et Au_1 et Bv_1

Fig. 4.



les nouveaux (*fig.* 4). On a, dans les triangles AMM_1 et BNN_1,

$$\frac{u}{u_1} = \frac{v}{v_1} = \frac{\sin(\theta_1 - \alpha)}{\sin(\theta - \alpha)} = \frac{\sin\theta_1 - \cos\theta_1 \operatorname{tang}\alpha}{\sin\theta - \cos\theta \operatorname{tang}\alpha};$$

or

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{(v_1 - u_1)\sin\theta_1}{d + (v_1 - u_1)\cos\theta_1};$$

on en déduit, après réduction,

$$\frac{u}{u_1} = \frac{v}{v_1} = \frac{d\sin\theta_1}{d\sin\theta - (v_1 - u_1)\sin(\theta_1 - \theta)}. \tag{7}$$

Cette substitution, faite dans une équation algébrique $F(u, v) = 0$, n'altère pas le degré de cette équation, non plus que les deux premières substitutions, ce qui devait avoir lieu.

9. *Transformation générale.* — Toute transformation peut se décomposer en plusieurs autres qui rentrent dans les cas précédents.

Soit, par exemple, à passer d'un système (Au, Bv) à un autre (A_1u_1, B_1v_1) qui lui est parallèle.

Appelons A_2 et B_2 les points où la droite A_1B_1 coupe respectivement Au et Bv. Nous passerons du système (Au, Bv) au système (A_2u, B_2v) par la première transformation, puis du système (A_2u, B_2v) au système (A_1u_1, B_1v_1) par la deuxième.

Soit maintenant à passer du système (Au, Bv) à un système (A_1u_1, B_1v_1) quelconque.

Appelons A_2 le point de rencontre de Au et A_1u_1, B_2 le point de rencontre de Bv et B_1v_1. Nous passerons du système (Au, Bv) au système (A_2u, B_2v) par la première transformation, puis du système (A_2u, B_2v) au système (A_2u_1, B_2v_1) par la troisième, et enfin du système (A_2u_1, B_2v_1) au système (A_1u_1, B_1v_1) par la première.

II. — Équation du point.

10. Si l'on considère un point fixe P et une droite variable MN passant par ce point, il existera entre les coordonnées de cette droite une relation qui sera l'équation du point P.

Cette relation est facile à établir. Tirons AP et BP (*fig.* 5), et posons

$$AA' = \alpha, \quad BB' = \beta.$$

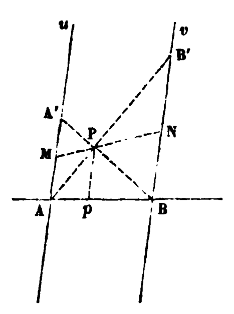
Nous aurons, pour une position quelconque de la droite MN,

$$\frac{BN}{MA'} = \frac{AM}{NB'}$$

ou

$$\frac{v}{\alpha - u} = \frac{\beta - v}{u},$$

Fig. 5.



ou encore

$$\frac{u}{\alpha} + \frac{v}{\beta} = 1;$$

telle sera l'équation du point P.

11. Réciproquement, toute équation du premier degré représente un point. Soit, par exemple,

$$Au + Bv + C = 0$$

une relation à laquelle satisfont constamment les coordonnées de la droite MN. On voit facilement, et c'est d'ailleurs un résultat bien connu, que la droite ainsi définie passe constamment par le point P tel que, si Pp est parallèle aux axes de coordonnées, on a

$$\frac{pA}{pB} = -\frac{B}{A}, \tag{8}$$

$$pP = \gamma = \frac{-C}{A+B}. \tag{9}$$

Pour que le point P soit sur l'axe des origines, il faut que γ, et par suite C soit nul. L'équation d'un tel point est donc

$$Au + Bv = 0.$$

Pour que le point P soit à l'infini, il faut que γ soit infini, et par suite que $A + B = 0$.

Si le point P est sur Au, son équation se réduit à

$$Au + C = 0;$$

sur Bv,

$$Bv + C = 0.$$

Coordonnées de la droite AP,

$$u = 0, \quad v = -\frac{C}{B};$$

coordonnées de la droite BP,

$$v = 0, \quad u = -\frac{C}{A}.$$

Pour le point à l'infini dans la direction des axes, $A = 0$, $B = 0$; l'équation de ce point sera donc $C = 0$.

12. Si l'équation du point est mise sous la forme

$$u = mv + n,$$

on a

$$n = AA' \quad \text{et} \quad m = \frac{pA}{pB}.$$

Remarquons enfin que, si A et B sont de même signe, le point P est entre les axes de coordonnées; s'ils sont de signes contraires, le point P est en dehors de ces axes.

13. *Point de rencontre de deux droites.* — Soient les droites définies par les coordonnées (u_1, v_1) et (u_2, v_2). On a immédiatement, pour l'équation de leur

point de rencontre,

$$(10)\qquad \begin{vmatrix} u & v & 1 \\ u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$(10')\qquad \frac{u - u_1}{u_2 - u_1} = \frac{v - v_1}{v_2 - v_1}.$$

14. *Condition pour que trois droites passent au même point.* — Cette condition sera, d'après ce qui précède,

$$(11)\qquad \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \\ u_3 & v_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

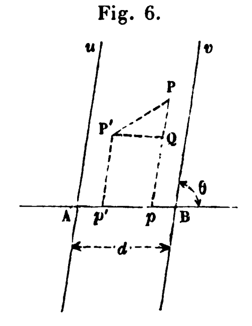
15. *Équation générale des points situés sur une droite donnée.* — Si u_1 et v_1 sont les coordonnées de la droite donnée, l'équation de tout point situé sur cette droite sera de la forme

$$(12)\qquad u - u_1 = \lambda(v - v_1),$$

λ étant égal à $\frac{\mathrm{PM}}{\mathrm{PN}}$.

16. *Distance de deux points.* — Soient (*fig.* 6) deux

Fig. 6.



points P et P' ayant pour équations

$$\mathrm{A}u + \mathrm{B}v + \mathrm{C} = 0$$

et

$$A'u + B'v + C' = 0.$$

Menons par les points P et P' les parallèles Pp et $P'p'$ aux axes, et par le point P' la parallèle P'Q à AB; nous aurons

$$PP'^2 = \delta^2 = PQ^2 + P'Q^2 + 2PQ.P'Q\cos\theta;$$

or

$$PQ = Pp - P'p' = \frac{-C}{A+B} - \frac{-C'}{A'+B'},$$

et, en appelant d la distance AB,

$$P'Q = Ap - A'p = \frac{Bd}{A+B} - \frac{B'd}{A'+B'};$$

donc

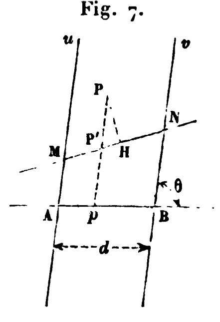
$$(13)\quad \left\{ \begin{aligned} \delta^2 = &\left(\frac{C}{A+B} - \frac{C'}{A'+B'}\right)^2 + d^2\left(\frac{B}{A+B} - \frac{B'}{A'+B'}\right)^2 \\ &- 2\left(\frac{C}{A+B} - \frac{C'}{A'+B'}\right)\left(\frac{B}{A+B} - \frac{B'}{A'+B'}\right) d\cos\theta. \end{aligned} \right.$$

17. *Distance d'un point à une droite.* — Soient le point P dont l'équation est

$$Au + Bv + C = 0,$$

et la droite MN dont les coordonnées sont u_1 et v_1

Fig. 7.



(*fig.* 7). Abaissons du point P la perpendiculaire PH sur MN, et menons parallèlement aux axes la droite Pp

qui coupe MN au point P'. Nous avons

$$\mathrm{PH} = \mathrm{PP'}\sin\mathrm{PP'H} = (\mathrm{P}p - \mathrm{P'}p)\sin(\theta - \alpha),$$

α étant l'angle de la droite MN avec AB.

Or nous avons vu que

$$\mathrm{P}p = \frac{-\mathrm{C}}{\mathrm{A}+\mathrm{B}};$$

pour $\mathrm{P'}p$, on a

$$\frac{\mathrm{P'}p - u_1}{v_1 - u_1} = \frac{\mathrm{A}p}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}+\mathrm{B}},$$

d'où

$$\mathrm{P'}p = \frac{\mathrm{A}u_1 + \mathrm{B}v_1}{\mathrm{A}+\mathrm{B}};$$

enfin on a

$$\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin\alpha} = \frac{d}{v_1 - u_1},$$

d'où

$$\mathrm{tang}(\theta - \alpha) = \frac{d\sin\theta}{v_1 - u_1 + d\cos\theta}$$

et

$$\sin(\theta-\alpha) = \pm\frac{d\sin\theta}{\sqrt{d^2 + (v_1-u_1)^2 + 2d(v_1-u_1)\cos\theta}}.$$

Il vient, par suite, pour l'expression de PH,

$$(14)\qquad \mathrm{PH} = \mp\frac{(\mathrm{A}u_1 + \mathrm{B}v_1 + \mathrm{C})d\sin\theta}{(\mathrm{A}+\mathrm{B})\sqrt{d^2 + (v_1-u_1)^2 + 2d(v_1-u_1)\cos\theta}}.$$

Si l'on veut, par exemple, la distance δ de l'origine A à la droite (u_1, v_1), on aura, en appliquant la formule précédente,

$$(14')\qquad \delta = \mp\frac{u_1 d\sin\theta}{\sqrt{d^2 + (v_1-u_1^2)^2 + 2d(v_1-u_1)\cos\theta}}.$$

18. *Droites et points imaginaires.* — Nous appellerons *droites imaginaires* les droites dont les coordonnées seront de la forme

$$u = a + bi,\quad v = c + di.$$

Deux droites seront dites *imaginaires conjuguées*

quand leurs coordonnées seront respectivement conjuguées. La première aura pour équation

$$u = a + bi, \quad v = c + di;$$

la seconde

$$u = a - bi, \quad v = c - di.$$

La droite médiane de deux droites imaginaires conjuguées est réelle; ses coordonnées sont en effet a et c.

Le point de rencontre de deux droites imaginaires conjuguées est réel; son équation est, en effet,

$$\frac{v - c - di}{2di} = \frac{u - a - bi}{2bi}$$

ou

$$\frac{v - c}{d} = \frac{u - a}{b}.$$

Un point est dit *imaginaire* lorsque les coefficients de son équation sont imaginaires :

$$(A + Bi)u + (C + Di)v + E + Fi = 0.$$

Point imaginaire conjugué

$$(A - Bi)u + (C - Di)v + E - Fi = 0.$$

En écrivant les équations

$$Au + Cv + E + i(Bu + Dv + F) = 0$$

et

$$Au + Cv + E - i(Bu + Dv + F) = 0,$$

on voit que ces deux points se trouvent sur la droite qui joint les points réels dont les équations sont

$$Au + Cv + E = 0 \quad \text{et} \quad Bu + Dv + F = 0.$$

19. Théorème. — *Toute équation homogène de degré m en u et v représente un système de m points réels ou imaginaires situés sur l'axe des origines.*

Nous exprimerons ce fait en disant qu'une telle équation représente une ponctuelle située sur l'axe des origines. (*A suivre.*)

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1883.

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

(voir 3e série, t. III, p. 202);

PAR M. FONTENÉ,
Professeur au Collège Rollin.

D'un point P, *pris sur une normale en un point* A *d'un paraboloïde elliptique, on peut mener à la surface quatre autres normales ayant pour pieds les points* B, C, D, E :

1° *Trouver l'équation de la sphère* S *passant par les quatre points* B, C, D, E;

2° *Trouver le lieu des centres* I *des sphères* S *quand le point* P *se déplace sur la normale au point* A, *ainsi que la surface engendrée par la droite* PI.

Je démontre d'abord le théorème suivant, analogue au théorème connu de Joachimsthal sur les normales à l'ellipse, et que je crois nouveau. La démonstration s'applique au théorème de Joachimsthal.

THÉORÈME. — *Si d'un point* P *on mène à une surface du second degré les six normales dont les pieds sont* A, B, C, D, E, F, *les cinq points* B, C, D, E, F, *et le point* A' *diamétralement opposé au point* A *sont sur une infinité de surfaces du second degré ayant leurs axes parallèles à ceux de la surface donnée; par suite, sur trois surfaces de révolution du second degré, dont les axes sont parallèles à ceux de la surface donnée.*

Soit l'ellipsoïde représenté par l'équation

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Les coordonnées x, y, z du pied d'une des normales vérifient l'équation (1); les coordonnées x_0, y_0, z_0 du pied A donnent en particulier

$$(2) \qquad \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Retranchant cette équation de la précédente, on a

$$(3) \qquad \sum \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{a^2} = 0.$$

Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point P; on a

$$\frac{x_1 - x}{\frac{x}{a^2}} = \frac{y_1 - y}{\frac{y}{b^2}} = \frac{z_1 - z}{\frac{z}{c^2}} = k;$$

en particulier,

$$\frac{x_1 - x_0}{\frac{x_0}{a^2}} = \frac{y_1 - y_0}{\frac{y_0}{b^2}} = \frac{z_1 - z_0}{\frac{z_0}{c^2}} = k_0;$$

on en tire

$$x_1 = x\left(1 + \frac{k}{a^2}\right) = x\frac{(a^2 + k)}{a^2}, \quad \ldots,$$

$$x_1 = x_0\left(1 + \frac{k_0}{a^2}\right) = x_0\frac{a^2 + k_0}{a^2}, \quad \ldots,$$

d'où

$$(4) \qquad \frac{x}{x_0} = \frac{a^2 + k_0}{a^2 + k}, \quad \ldots.$$

On a, par suite,

$$\frac{x - x_0}{x} = \frac{k_0 - k}{a^2 + k_0}.$$

L'équation (3) devient, en divisant par $k_0 - k$,

$$(5) \qquad \sum \frac{x(x+x_0)}{a^2(a^2+k_0)} = 0.$$

Il est facile de voir que la division par $k_0 - k$ supprime le point A; en effet, si l'on suppose le point A donné par ses coordonnées x_0, y_0, z_0, et le point P sur la normale en A donné par le paramètre k_0, les équations (4) donnent x, y, z en fonction de k; l'équation (3) est alors une équation en k qui donne les pieds des six normales, et, en supprimant le facteur $k_0 - k$, on supprime le point A.

L'équation (5) est donc celle d'une surface du second degré qui passe par les cinq points B, C, D, E, F; il est visible qu'elle passe par le point A'. Or cette surface a ses axes parallèles à ceux de la surface donnée, et celle-ci contient également les six points B, C, D, E, F, A'. Donc ces six points sont tels qu'il y passe une infinité de surfaces du second degré ayant leurs axes parallèles à ceux de la surface donnée; ce qui constitue un théorème, puisque les directions des axes font trois conditions.

Parmi ces surfaces, la surface (5) est celle qui passe au centre O de la surface donnée; son centre est le milieu de OA'.

Parmi ces surfaces, il y a encore trois surfaces de révolution dont les axes sont respectivement parallèles à Ox, Oy, Oz. Comme une telle surface ne dépend que de cinq paramètres, trois pour le centre, deux pour les longueurs d'axes, elle est déterminée par les cinq points B, C, D, E, F, et le fait qu'elle passe en A' constitue un théorème.

On a facilement les équations de ces surfaces de révolution, par exemple de celle dont l'axe est parallèle à Ox. Il suffit d'éliminer y^2 et z^2 entre les équations (1)

et (5) et l'identité $y^2+z^2-(y^2+z^2)=0$; ce qui donne

$$(6)\qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & -(y^2+z^2) \\ \dfrac{1}{b^2} & \dfrac{1}{c^2} & \dfrac{x^2}{a^2}-1 \\ \dfrac{1}{b^2(b^2+k_0)} & \dfrac{1}{c^2(c^2+k_0)} & \dfrac{x^2}{a^2(a^2+k_0)}+\sum\dfrac{x_0x}{a^2(a^2+k_0)} \end{vmatrix}=0.$$

Cas du paraboloïde. — Dans ce cas, l'un des pieds de normale est à l'infini sur l'axe; et l'on a à faire deux hypothèses.

Si le point A est un des pieds à distance finie, A′ est à l'infini sur l'axe, et la surface analogue à la surface (5) contient les quatre pieds à distance finie, B, C, D, E, le pied F à l'infini, et le point A′.

Le paraboloïde ayant pour équation

$$\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}-2x=0,$$

un calcul analogue au précédent donne pour l'équation de cette surface [1]

$$(7)\qquad \frac{y(y+y_0)}{p(p+k_0)}+\frac{z(z+z_0)}{q(q+k_0)}+2=0.$$

C'est un cylindre. Les surfaces du second degré qui passent par la courbe commune sont des paraboloïdes, parmi lesquels est un paraboloïde de révolution dont l'équation est

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} & y^2+z^2-2(p+q+k_0)x-(q+k_0)\frac{y_0y}{p} \\ & \qquad -(p+k_0)\frac{z_0z}{q}-2(p+k_0)(q+k_0)=0. \end{aligned}\right.$$

---

[1] On pose

$$\frac{x_1-x_0}{-1}=\frac{y_1-y_0}{\dfrac{y_0}{p}}=\frac{z_1-z_0}{\dfrac{z_0}{q}}=k_0.$$

Les deux autres surfaces de révolution sont des cylindres paraboliques.

Si, au contraire, le point A est le pied à l'infini, A' est le sommet du paraboloïde; la méthode précédente n'est plus applicable. Mais, des trois surfaces de révolution qui contiennent alors les cinq points B, C, D, E, F, et le sommet du paraboloïde, celle dont l'axe est parallèle à l'axe du paraboloïde est connue et s'obtient par le calcul suivant.

L'équation du paraboloïde étant

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} - 2x = 0,$$

le point P ayant pour coordonnées x_1, y_1, z_1, les pieds des normales sont déterminés par les relations

$$\frac{x_1 - x}{-1} = \frac{y_1 - y}{\frac{y}{p}} = \frac{z_1 - z}{\frac{z}{q}};$$

on en conclut, en tenant compte de l'équation du paraboloïde,

$$2x(x_1 - x) + y(y_1 - y) + z(z_1 - z) = 0$$

ou

$$(9) \qquad 2x^2 + y^2 + z^2 - (2x_1 x + y_1 y + z_1 z) = 0,$$

équation d'une surface de révolution autour d'un axe parallèle à Oz, et qui passe au sommet du paraboloïde.

Cette surface de révolution donne facilement les deux autres.

On peut remarquer qu'elle passe au point P, et que son centre est au milieu de OP.

Elle est indépendante des paramètres du paraboloïde, et forme un lieu géométrique.

Remarque sur une surface qui passe par les pieds de quatre des normales. — L'équation (5) peut s'écrire

$$(10) \qquad \sum \frac{xx_0(x+x_0)}{a^4 x_1} = 0,$$

forme symétrique en x et x_0.

Si l'on désigne par x'_0, y'_0, z'_0 les coordonnées du pied F d'une seconde normale issue du point P, on a de même la surface

$$(11) \qquad \sum \frac{xx'_0(x+x'_0)}{a^4 x_1} = 0,$$

qui contient les cinq autres pieds.

Les quatre pieds B, C, D, E sont donc sur les surfaces (10) et (11). Retranchant, on a

$$\sum \frac{x^2(x_0 - x'_0) + x(x_0^2 - x'^2_0)}{a^4 x_1} = 0,$$

$$\sum (x_0 - x'_0) \frac{x\left(x + \frac{x_0 + x'_0}{2}\right)}{a^4 x_1} = 0.$$

Or on a

$$x_0(a^2 + k_0) = a^2 x_1,$$
$$x'_0(a^2 + k'_0) = a^2 x_1;$$

d'où

$$x_0 - x'_0 = (k'_0 - k_0)\frac{x_0 x'_0}{a^2 x_1}.$$

L'équation devient, en divisant par $k'_0 - k_0$,

$$(12) \qquad \sum \frac{x_0 x'_0}{a^6 x_1^2} x\left(x + \frac{x_0 + x'_0}{2}\right) = 0,$$

équation d'une surface dont les axes sont parallèles à ceux de la surface donnée, et qui contient, outre les quatre points B, C, D, E, le centre O de la surface donnée, et le point k symétrique du milieu de AF par rapport à ce centre; son centre est le milieu de OK.

Équation de la sphère qui passe par quatre des six pieds de normales. — Les quatre pieds B, C, D, E sont sur les trois surfaces à axes parallèles (1), (10), (11). En éliminant x^2, y^2, z^2 entre les équations de ces trois surfaces et l'identité

$$x^2 + y^2 + z^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 0,$$

on aura l'équation de la sphère qui passe en B, C, D, E.

Dans le cas du paraboloïde, A étant un des pieds à distance finie, F le pied à l'infini, il suffit d'ajouter les équations (8) et (9). Mais, comme l'équation (9) contient les coordonnées x_1, y_1, z_1, et qu'on a posé

$$x_1 = x_0 - k_0,$$
$$y_1 = y_0 \frac{p + k_0}{p},$$
$$z_1 = z_0 \frac{q + k_0}{q},$$

on y remplace d'abord x_1, y_1, z_1 par ces valeurs.

On obtient finalement

$$(13)\quad \left\{ \begin{array}{l} 2(x^2 + y^2 + z^2) - 2x(x_0 + p + q) \\ \quad - (p + q + 2k_0)\left(\frac{y_0 y}{p} + \frac{z_0 z}{q}\right) - 2(p + k_0)(q + k_0) = 0. \end{array} \right.$$

Application au problème du concours général. — On trouve immédiatement, pour le lieu des centres I,

$$x = \frac{x_0}{2} + \frac{p + q}{2},$$
$$\frac{y}{z} = \frac{y_0}{p} : \frac{z_0}{q},$$

c'est-à-dire une droite parallèle au plan yOz et rencontrant Ox.

Quant à la droite PI, elle décrit un paraboloïde. En effet, les points P et I décrivent deux droites, et leurs

coordonnées montrent qu'ils sont liés homographiquement, de manière à donner une génératrice à l'infini.

D'ailleurs, si l'on mène par l'origine des parallèles aux droites PI, le lieu de ces parallèles donne le plan directeur

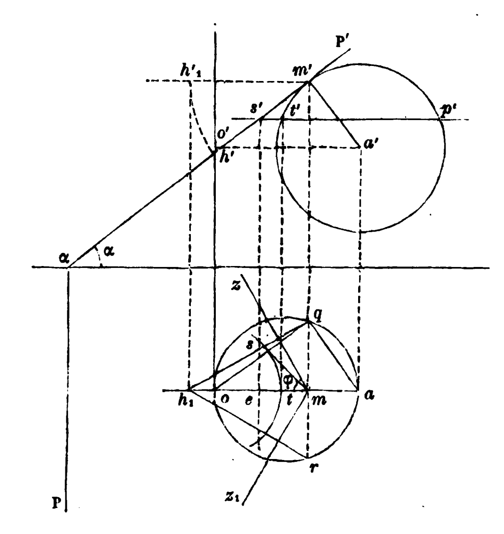
$$\frac{\frac{x}{2}+p\frac{y}{y_0}}{(q-p)-\frac{x_0}{2}}=\frac{\frac{x}{2}+q\frac{z}{z_0}}{(p-q)-\frac{x_0}{2}}.$$

CONSTRUCTION DES TANGENTES AU POINT DOUBLE DE LA SECTION DU TORE PAR SON PLAN TANGENT;

PAR M. DOUCET,

Professeur au lycée Corneille, à Rouen.

Soit mm' le point de contact. Je construis un point



voisin ss'. Si l'on appelle φ l'angle que fait avec mo la

tangente en m, on a

$$\operatorname{tang}\varphi = \lim \frac{se}{me}.$$

Or

$$\overline{se}^2 = (2ot - te)te, \quad te = s't' = \frac{\overline{m's'}^2}{s'p'}.$$

On a donc

$$\frac{\overline{se}^2}{\overline{me}^2} = \frac{2ot - te}{s'p'} \times \left(\frac{m's'}{me}\right)^2 = \frac{2ot - te}{s'p'} \times \frac{1}{\cos^2\alpha};$$

α désigne l'inclinaison du plan tangent sur le plan horizontal. Mais

$$\lim \frac{2ot - te}{s'p'} = \frac{om}{ma} = \frac{\overline{oq}^2}{\overline{aq}^2} = \operatorname{tang}^2\widehat{qao};$$

donc

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\operatorname{tang}\widehat{qao}}{\cos\alpha}.$$

Soit

$$mh_1 = m'h' = \frac{mo}{\cos\alpha}; \quad \operatorname{tang}\widehat{mqh_1} = \frac{mo}{mq.\cos\alpha} = \operatorname{tang}\varphi.$$

La tangente cherchée mz est perpendiculaire à qh_1.

La construction est donc celle-ci : décrire sur oa comme diamètre une circonférence qui est coupée en q et en r par la ligne de rappel du point m; prendre $mh_1 = m'h'$ et tracer les droites qh_1, rh_1. Les tangentes au point double sont les droites mz et mz_1, perpendiculaires à qh_1 et à rh_1.

PROPRIÉTÉS D'UNE FONCTION ARITHMÉTIQUE;

PAR M. E. CESARO.

I. Ayant décomposé p, de toutes les manières possibles, en n nombres entiers, x_1, x_2, x_3, ..., x_n,

posons

$$u_{n,p} = \sum \frac{1}{(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)\ldots(1+x_n)}.$$

Cette fonction u jouit de curieuses propriétés, que nous allons énoncer, en laissant au lecteur le soin de chercher les démonstrations.

Nous supposons $u_{n,p} = 0$, si n est inférieur à 1, ou supérieur à p.

II. Théorème. — *B_p étant le $p^{\text{ième}}$ des nombres de Bernoulli, définis par l'égalité symbolique*

$$(B+1)^p - B^p = 0,$$

on a

$$B_p = 1.2.3\ldots p\left[\frac{1}{1+u}\right]^p,$$

pourvu que, après avoir développé le second membre par rapport aux puissances croissantes de u, on remplace u^n par $u_{n,p}$.

En d'autres termes,

$$\frac{B_p}{1.2.3\ldots p} = -C_{p,1}u_{1,p} + C_{p+1,2}u_{2,p} - C_{p+2,3}u_{3,p} + \ldots \pm C_{2p-1,p}u_{p,p}.$$

Par exemple,

$$\frac{B_4}{1.2.3.4} = -4u_{1,4} + 10u_{2,4} - 20u_{3,4} + 35u_{4,4}.$$

Or

$$u_{1,4} = \frac{1}{5},$$

$$u_{2,4} = \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.3} + \frac{1}{4.2} = \frac{13}{36},$$

$$u_{3,4} = \frac{1}{2.2.3} + \frac{1}{2.3.2} + \frac{1}{3.2.2} = \frac{1}{4},$$

$$u_{4,4} = \frac{1}{2.2.2.2} = \frac{1}{16};$$

par conséquent

$$B_4 = 24\left(-\frac{4}{5} + \frac{65}{18} - 5 + \frac{35}{16}\right) = -\frac{1}{30}.$$

III. $S_{n,p}$ étant la somme des produits p à p, des n premiers nombres naturels, on a *symboliquement*

$$\frac{S_{n-p+1,p}}{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+p)} = [1+u]^n.$$

Par exemple, pour $p=3$, on trouve, après quelques transformations,

$$S_{n,3} = 6\,C_{n+1,4} + 20\,C_{n+1,5} + 15\,C_{n+1,6}.$$

Si l'on ordonne $S_{n,p}$ par rapport aux puissances de n, on reconnaît que $-\frac{B_p}{p}$ est le coefficient de n.

IV. Si l'on pose

$$A_p = \frac{u_{1,p}}{1} + \frac{u_{2,p}}{1.2} + \frac{u_{3,p}}{1.2.3} + \frac{u_{4,p}}{1.2.3.4} + \ldots,$$

on a, *symboliquement*,

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = \frac{e}{1+Ax},$$

c'est-à-dire

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e\left[1 - \frac{1}{2}x + \frac{11}{24}x^2 - \frac{7}{16}x^3 + \frac{2447}{5760}x^4 - \ldots\right].$$

V. On a

$$u_{1,p} = \frac{1}{p+1},$$

$$u_{2,p} = \frac{2}{p+2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{p}\right),$$

................................,

$$u_{p,p} = \frac{1}{2^p}.$$

On peut calculer les valeurs de la fonction u au

moyen de la relation

$$(n+p)u_{n,p} = (n+p-1)u_{n,p-1} + nu_{n-1,p-1}.$$

On obtient ainsi le Tableau suivant :

	$u_{1,p}$	$u_{2,p}$	$u_{3,p}$	$u_{4,p}$	$u_{5,p}$	...
$u_{n,1}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	...
$u_{n,2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0	...
$u_{n,3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$	0	0	...
$u_{n,4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{13}{36}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	0	...
$u_{n,5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{11}{30}$	$\frac{17}{48}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{32}$	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

VI. Voici quelques autres propriétés de la fonction u :

$$C_{p+1,1}u_{1,p} - C_{p+2,2}u_{2,p} + C_{p+3,3}u_{3,p} - \ldots \pm C_{2p,p}u_{p,p} = \pm \frac{1}{1.2.3\ldots p},$$

$$C_{p+2,1}u_{1,p} - C_{p+3,2}u_{2,p} + C_{p+4,3}u_{3,p} - \ldots \pm C_{2p+1,p}u_{p,p} = \pm \frac{2^{p+1}-(p+1)}{1.2\ldots3(p+1)},$$

$$\frac{u_{1,p}}{1} - \frac{u_{2,p-1}}{1.2} + \frac{u_{3,p-2}}{1.2.3} - \frac{u_{4,p-3}}{1.2.3.4} + \ldots = \frac{p}{1.2.3\ldots(p+1)},$$

$$\frac{u_{1,p}}{1} + \frac{u_{2,p-1}}{1.2} + \frac{u_{3,p-2}}{1.2.3} + \frac{u_{4,p-3}}{1.2.3.4} + \ldots = \frac{1}{2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} - \ldots \pm \frac{1}{2.3.4\ldots p}.$$

THÉORÈME DE CINÉMATIQUE;

PAR M. E. CESARO.

Lorsqu'un point M parcourt une trajectoire quelconque, on peut supposer, à chaque instant, qu'il exé-

cute un mouvement hélicoïdal autour d'un *axe central*, qui est l'axe de l'hélice osculatrice à la trajectoire, au point considéré. On en déduit facilement que le mouvement d'un point peut toujours être ramené au roulement et au glissement d'une surface réglée, solidaire avec le point, sur une surface réglée fixe dans l'espace. *Dans quels cas ces surfaces sont-elles développables?*

On sait que l'axe central, parallèle à la rectifiante, rencontre la normale principale, entre le point M et le centre de courbure, à une distance de M égale à

$$\rho \sin^2\varphi = R,$$

φ étant l'angle de la rectifiante avec la tangente. Si A, B, C sont les cosinus directeurs de l'axe central, et f, g, h les cosinus directifs de la normale principale, les équations de l'axe central sont

$$\frac{X-(x+Rf)}{A} = \frac{Y-(y+Rg)}{B} = \frac{Z-(z+Rh)}{C},$$

et, par conséquent, la condition nécessaire et suffisante pour que cet axe engendre une surface développable est exprimée par l'égalité

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} A & dA & dx + R\,df + f\,dR \\ B & dB & dy + R\,dg + g\,dR \\ C & dC & dz + R\,dh + h\,dR \end{vmatrix} = 0.$$

Or on sait que la normale principale est perpendiculaire à deux axes centraux consécutifs, et que ceux-ci font entre eux un angle $d\varphi$. Il en résulte

$$\frac{f}{B\,dC - C\,dB} = \frac{g}{C\,dA - A\,dC} = \frac{h}{A\,dB - B\,dA} = \pm\frac{1}{d\varphi}.$$

La condition (1) devient donc

$$[\Sigma f\,dx + R\,\Sigma f\,df + dR\,\Sigma f^2]\,d\varphi = 0$$

ou bien

$$d\varphi\,dR = 0.$$

Conséquemment *il y a deux classes de trajectoires, telles que, si un point les parcourt, son mouvement revient au roulement et au glissement d'une surface développable, solidaire avec le point, sur une surface développable fixe dans l'espace.* La première classe, définie par la condition $\varphi =$ const., est connue : c'est la classe des *hélices*, ou lignes géodésiques des surfaces cylindriques. Il nous resterait à étudier la seconde classe de trajectoires, répondant à la condition $R =$ const., ou bien, ainsi qu'il est facile de le reconnaître, à la condition

$$\frac{1}{\rho} + \frac{\rho}{r^2} = \text{const.}$$

Si l'on considère les surfaces rectifiantes des trajectoires de la dernière classe, on voit que le problème peut être posé en ces termes : *Quelles sont les surfaces développables, qui ont une courbure constante le long d'une de leurs géodésiques ?*

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1884.

Composition de Mathématiques.

On donne une conique $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$: on joint un point M de cette conique aux deux foyers F et F'.

I. On demande d'exprimer les coordonnées du centre du cercle inscrit dans l'intérieur du triangle MFF', au moyen des coordonnées du point M.

II. Dans le cas où la conique donnée est une ellipse, on démontrera que, si l'on considère les cercles inscrits dans deux triangles correspondant à deux points M et

M′ de la conique, l'axe radical de ces deux cercles passe par le point milieu du segment MM′.

III. Pour chaque position du point M, le rayon vecteur FM touche le cercle correspondant en un point P : on déterminera en coordonnées polaires l'équation du lieu décrit par le point P. (On prendra le foyer F pour origine des rayons, et l'axe des x pour origine des angles.)

N. B. — Dans toutes ces questions il est nécessaire de distinguer le cas où la conique donnée est une ellipse de celui où elle est une hyperbole.

Lavis.

Deux troncs de cône égaux, dont les axes sont verticaux, sont raccordés entre eux par une portion de sphère. Les parallèles de contact sont des cercles ab et cd. Exécuter à teintes plates, à l'encre de Chine, le lavis du solide ainsi constitué.

Composition de Géométrie descriptive.

Représenter par ses projections le solide commun à un cône et à un cylindre pleins, tous deux de révolution.

Les axes sont de front et se coupent à angle droit au-dessus du plan horizontal : leur plan est à $0^{m},10$ en avant du plan vertical.

Le cône est tangent au plan horizontal : son demi-angle au sommet est le quart d'un angle droit.

Le cylindre a $0^{m},05$ de rayon : son axe rencontre le plan horizontal à $0^{m},16$ du sommet du cône.

N. B. — On prendra la ligne de terre perpendiculaire aux grands côtés du cadre et à égale distance des deux autres côtés.

Composition de Trigonométrie.

On donne les trois côtés d'un triangle,

$$a = 12514^{m},87,$$
$$b = 22636^{m},55,$$
$$c = 18915^{m},92.$$

Déterminer les trois angles, et la surface en hectares.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1360

(voir 2ᵉ série, t. XX, p. 144);

PAR M. E. FAUQUEMBERGUE.

Trouver les trajectoires orthogonales d'une droite de longueur constante mobile entre deux axes rectangulaires. (BARBARIN.)

On peut voir immédiatement que ces trajectoires sont des épicycloïdes. En effet, la normale d'une des courbes cherchées, ayant une longueur constante comprise entre Ox et Oy, qui n'est autre chose que la droite mobile donnée, est toujours tangente à une épicycloïde; cette épicycloïde est donc la développée des courbes cherchées, et l'une de ces courbes sera elle-même une épicycloïde. C'est d'ailleurs ce que nous allons trouver par le calcul.

Soient l la longueur constante de la droite mobile AB et x, y les coordonnées d'un point quelconque M de cette droite.

La tangente à la trajectoire fait avec les axes des

angles dont les cosinus sont respectivement $\frac{dx}{ds}$ et $\frac{dy}{ds}$, et, comme cette tangente est perpendiculaire à AB, il en résulte

$$\text{AM} = y\frac{ds}{dx}, \quad \text{BM} = x\frac{ds}{dy};$$

par suite,

$$x\frac{ds}{dy} + y\frac{ds}{dx} = l.$$

Telle est l'équation différentielle des trajectoires.

Pour l'intégrer, posons $\frac{dy}{dx} = p$; elle devient

$$(1) \qquad x + py = \frac{lp}{\sqrt{1+p^2}}$$

ou, en différentiant et remplaçant dx par $\frac{dy}{p}$,

$$(2) \qquad \frac{dy}{dp} + \frac{p}{1+p^2}y = \frac{lp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

L'intégrale générale de cette équation linéaire est

$$y = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\left[C + l\int\frac{p\,dp}{(1+p^2)^2}\right] = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\left[C - \frac{l}{2(1+p^2)}\right];$$

l'élimination de p entre cette équation et l'équation (1) donnerait l'équation générale des trajectoires. Mais il est préférable d'exprimer x et y en fonction de l'angle α de la tangente avec l'axe des x; il suffit de poser

$$p = \operatorname{tang}\alpha,$$

et les expressions de x et de y deviennent

$$(3) \qquad \begin{cases} x = l\sin\alpha + \frac{l}{2}\sin\alpha\cos^2\alpha - C\sin\alpha, \\ y = -\frac{l}{2}\cos^3\alpha + C\cos\alpha. \end{cases}$$

Toutes les courbes obtenues en faisant varier C sont

des courbes parallèles; car, en faisant

$$x_0 = l\sin\alpha + \frac{l}{2}\sin\alpha\cos^2\alpha, \quad y_0 = -\frac{l}{2}\cos^3\alpha,$$

on a

$$x = x_0 + \mathrm{C}\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right), \quad y = y_0 + \mathrm{C}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right),$$

ce qui exprime que le point x, y s'obtient en portant sur la normale, au lieu du point x_0, y_0, une longueur constante C. Parmi toutes ces courbes, choisissons celle qui passe par le milieu de la droite AB, quand cette droite est également inclinée sur les axes. Nous obtiendrons la valeur de C correspondant à ce cas; en écrivant que pour ce point $x = y$ et $\sin\alpha = \cos\alpha$; ce qui donne

$$\mathrm{C} = \frac{3l}{4}.$$

Les valeurs de x et de y peuvent alors se mettre sous la forme

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{3l}{8}\sin\alpha + \frac{l}{8}\sin 3\alpha, \\ y &= \frac{3l}{8}\cos\alpha - \frac{l}{8}\cos 3\alpha. \end{aligned} \right.$$

A l'inspection de ces formules, on reconnaît que la courbe est une épicycloïde engendrée par un point d'une circonférence de rayon $\frac{3l}{8}$ roulant à l'intérieur d'une circonférence de rayon $\frac{l}{2}$; donc cette épicycloïde et ses courbes parallèles donnent la solution générale du problème proposé. On peut dire encore que toutes ces trajectoires orthogonales sont les développantes d'une même épicycloïde.

Note. — La même question a été résolue par MM. Goffart, Moret-Blanc, Lez, Évesque.

Question 1465

(voir 3e série, t. II, p. 383);

PAR M. BARISIEN,
Lieutenant au 141e de ligne, à Bastia.

De deux points situés sur l'axe des x et équidistants de l'origine, on mène des tangentes à la conique représentée par l'équation

$$ax^2 + by^2 + 2hxy - 2x = 0;$$

prouver que les points d'intersection de ces tangentes sont sur la conique

$$by^2 + hxy - x = 0.$$

(WOLSTENHOLME.)

La conique donnée passe par l'origine et est normale à l'axe des x.

Soient α et β les coordonnées d'un point M du plan. L'équation quadratique des tangentes menées du point (α, β) à la conique donnée est

$$(ax^2 + by^2 + 2hxy - 2x)(a\alpha^2 + b\beta^2 + 2h\alpha\beta - 2\alpha) \\ - [a\alpha x + b\beta y + h(\alpha y + \beta x) - (x + \alpha)]^2 = 0.$$

En faisant $y = 0$, nous avons l'équation aux abscisses des points d'intersection de ces deux tangentes avec l'axe des x,

$$(ax^2 - 2x)(a\alpha^2 + b\beta^2 + 2h\alpha\beta - 2\alpha) \\ - [x(a\alpha + \beta h - 1) - \alpha]^2 = 0$$

ou, en réduisant,

$$x^2(ab\beta^2 - \beta^2 h^2 + 2\beta h - 1) - 2x(b\beta^2 + h\alpha\beta - \alpha) - \alpha^2 = 0.$$

La condition pour que les deux racines de cette équation soient égales et de signe contraire s'exprime par la relation

$$b\beta^2 + h\alpha\beta - \alpha = 0.$$

Les points (α, β) se trouvent donc bien sur la courbe

$$by^2 + hxy - x = 0,$$

qui est une hyperbole passant par l'origine, et normale à l'axe des x.

Question 1488

(voir 3e série, t. II, p. 351);

PAR M. N. GOFFART.

Décomposer en deux facteurs du second degré le premier membre de l'équation

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0,$$

où l'on suppose

$$A\sqrt{D} = C.$$

(FRANCESCO BORLETTI.)

On a immédiatement

$$\left(x^2 + \frac{A}{2}x + \sqrt{D}\right)^2$$
$$= x^4 + Ax^3 + x^2\left(\frac{A^2}{4} + 2\sqrt{D}\right) + A\sqrt{D}x + D$$
$$= x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D + x^2\left(\frac{A^2}{4} + 2\sqrt{D} - B\right);$$

donc

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$
$$= \left(x^2 + \frac{A}{2}x + \sqrt{D}\right)^2 - x^2\left(\frac{A^2}{4} + 2\sqrt{D} - B\right)$$
$$= \left\{x^2 + \left[\frac{A}{2} + \left(\frac{A^2}{4} + 2\sqrt{D} - B\right)^{\frac{1}{2}}\right]x + \sqrt{D}\right\}$$
$$\times \left\{x^2 + \left[\frac{A}{2} - \left(\frac{A^2}{4} + 2\sqrt{D} - B\right)^{\frac{1}{2}}\right]x + \sqrt{D}\right\}.$$

Chaque facteur de ce produit peut à son tour se décomposer en deux facteurs du premier degré; en groupant ces derniers deux à deux, on a les deux autres décompositions.

Remarque. — L'équation proposée prend la forme des équations *réciproques* si l'on pose $x = y\sqrt[4]{D}$; elle devient

$$y^4 + \frac{A}{\sqrt[4]{D}}y^3 + \frac{B}{\sqrt{D}}y^2 + \frac{A}{\sqrt[4]{D}}y + 1 = 0.$$

Elle se résout donc aisément au moyen des deux équations du second degré

$$y^2 + y\left(\frac{A}{2\sqrt[4]{D}} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4\sqrt{D}} + \frac{2\sqrt{D} - B}{\sqrt{D}}}\right) + 1 = 0$$

ou

$$x^2 + x\left(\frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} + 2\sqrt{D} - B}\right) + \sqrt{D} = 0,$$

dont les premiers membres sont précisément les facteurs déjà trouvés.

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc; Realis; Pisani; et G. Richard.

Question 1492

(voir 3ᵉ série, t. II, p. 352);

PAR M. N. GOFFART.

Soit O *un point intérieur à un triangle* ABC, *démontrer que*

$$\frac{OA.BC}{\sin(BOC - BAC)} = \frac{OB.CA}{\sin(COA - CBA)} = \frac{OC.AB}{\sin(AOB - ACB)} \text{ (1)}.$$

(J. BRILL, B.-A.)

Les droites AO, BO, CO rencontrent le cercle circonscrit au triangle ABC en des points A′, B′, C′ qui sont les sommets d'un triangle dans lequel les angles A′, B′,

---

(1) Le lecteur est prié de faire la figure.

C′ sont précisément les différences

$$BOC - BAC,\quad COA - CBA,\quad AOB - ACB.$$

Or les triangles AOC et A′OC′ sont semblables; et il en est de même de AOB, A′OB′. Donc

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{OC}{OA'} \quad \text{et} \quad \frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OB}.$$

Multipliant membre à membre, il vient, après transposition,

$$\frac{OB.AC}{A'C'} = \frac{OC.AB}{A'B}.$$

En considérant le couple des triangles BOC, B′OC′, avec chacun des précédents, on a de même

$$\frac{OA.BC}{B'C'} = \frac{OB.CA}{C'A'} = \frac{OC.AB}{A'B'}.$$

Remplaçant B′C′, C′A′, A′B′ par les quantités proportionnelles sin A′, sin B′, sin C′, on a la relation demandée.

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.

Question 1493

(voir 3e série, t. III, p. 352);

PAR UN ANONYME.

On suppose que les côtés a, b, c d'un triangle sont multiples du rayon r du cercle inscrit, et l'on donne la somme $a^3 + b^3 + c^3$ de leurs cubes; trouver les valeurs de ces côtés.

Par hypothèse : $a = \alpha r$, $b = \beta r$, $c = \gamma r$, α, β, γ étant

des nombres entiers. Par suite,

$$\frac{a+b+c}{2} \quad \text{ou} \quad p = \left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right)r;$$

$$p-a = \left(\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\right)r,$$

$$p-b = \left(\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}\right)r,$$

$$p-c = \left(\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\right)r.$$

En remplaçant p, $p-a$, $p-b$, $p-c$ par ces expressions dans la formule connue

$$pr^2 = (p-a)(p-b)(p-c),$$

il vient

$$\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right)r^3 = \frac{(\beta+\gamma-\alpha)(\alpha+\gamma-\beta)(\alpha+\beta-\gamma)r^3}{8};$$

d'où

$$4(\alpha+\beta+\gamma) = (\beta+\gamma-\alpha)(\alpha+\gamma-\beta)(\alpha+\beta-\gamma)$$

ou, en posant

$$(1) \quad (\beta+\gamma-\alpha) = A, \quad (\alpha+\gamma-\beta) = B, \quad (\alpha+\beta-\gamma) = C,$$

$$(2) \quad 4(A+B+C) = ABC,$$

Il est facile de conclure des égalités (1) et (2) que A, B, C sont nécessairement des nombres pairs.

Les nombres A, B, C ne peuvent être égaux; car les égalités $A = B = C$ donneraient

$$12A = A^3,$$

d'où

$$A^2 = 12,$$

et A serait incommensurable.

Soit A le plus grand de ces trois nombres, on aura

$$A+B+C < 3A$$

et par suite

$$ABC < 12A; \quad BC < 12.$$

D'autre part, l'équation (2)

$$4(A + B + C) = ABC$$

revient à

$$4(B + C) = (BC - 4)A;$$

et sous cette forme elle donne $BC > 4$.

Or le produit BC des deux nombres pairs B, C étant compris entre 4 et 12 est nécessairement égal à 8. Donc, en supposant $B > C$, on a

$$B = 4 \quad \text{et} \quad C = 2, \quad \text{d'où} \quad A = 6.$$

En remplaçant A, B, C par 6, 4, 2, on tire des équations (1) :

$$\alpha = 3, \quad \beta = 4, \quad \gamma = 5;$$

d'où

$$a = 3r, \quad b = 4r, \quad c = 5r$$

et

$$a^3 + b^3 + c^3 = (3^3 + 4^3 + 5^3) r^3 = (6r)^3.$$

Par conséquent, en nommant s la somme donnée, égale à $a^3 + b^3 + c^3$, on aura

$$(6r)^3 = s, \quad r = \frac{1}{6}\sqrt[3]{s}$$

et

$$a = \frac{3}{6}\sqrt[3]{s}, \quad b = \frac{4}{6}\sqrt[3]{s}, \quad c = \frac{5}{6}\sqrt[3]{s}.$$

La question est ainsi résolue.

Si, comme exemple, on suppose

$$s = 5832 = 18^3,$$

il en résultera

$$r = 3, \quad a = 9, \quad b = 12, \quad c = 15.$$

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.

QUESTIONS.

1503. L'intégrale générale de l'équation

$$\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} - xy = 0$$

est donnée par la formule

$$y = \sum \mathrm{A} \int_0^\infty e^{-\frac{\alpha^m}{m}} (e^{\alpha x} + e^{\alpha\theta x} + e^{\alpha\theta^2 x} + \ldots + e^{\alpha\theta^{m-1} x})\, d\alpha,$$

dans laquelle θ doit être remplacée par les m racines de l'équation

$$\theta^m - 1 = 0.$$

(Catalan.)

1504. Le triangle ABC, rectangle en A, est inscrit dans une hyperbole équilatère; les tangentes à cette courbe aux points B et C se coupent en T; la normale au point B coupe le côté AC au point B′, la normale au point C coupe le côté AB au point C′. Démontrer que l'angle B′TC′ est égal à l'angle BTC des tangentes.

(D'Ocagne.)

1505. De chaque point M du cercle circonscrit à un triangle, on abaisse une perpendiculaire MP sur la droite de Simpson relative à ce point et à ce triangle; on demande :

1° Le lieu du pied P de cette perpendiculaire;

2° L'enveloppe de la droite MP. (D'Ocagne.)

1506. Soient CA, CB deux demi-diamètres conjugués d'une ellipse; et P, Q deux points de CA, CB prolongés, tels que AP.BQ = 2CA.CB. Démontrer que BP et AQ se coupent sur l'ellipse. (Genese, M.-A.)

1507. PQ est un diamètre d'une hyperbole équilatère; un cercle décrit du point P comme centre avec PQ pour rayon rencontre l'hyperbole en trois autres points L, M, N : démontrer que le triangle LMN est équilatéral.

(Les énoncés 1506, 1507 sont extraits du journal anglais : *The educational Times.*)

1508. On sait que les cordes d'une conique qui sont vues d'un point C de la courbe sous un angle droit passent par un point fixe P; la polaire de ce point, par rapport à la conique, est une corde commune de cette courbe et du point C, considéré comme un cercle infiniment petit.

Cela posé, soient A et B deux points quelconques de cette polaire. Par les trois points A, B et C, on peut mener trois coniques ayant un contact du second ordre avec la conique donnée aux points L, M et N respectivement; les droites CL, CM et CN sont normales aux côtés d'un triangle équilatéral, et il en est de même des droites qui joignent le point C aux quatrièmes points de rencontre des trois coniques osculatrices deux à deux.

(GENTY.)

RECTIFICATION

(Numéro de juillet 1884).

Page 308, ligne 5, après *manière,* remplacer les deux points par une virgule.

Page 309, ligne 3, au lieu de $y = -57$, lisez $y = \pm -257$.

COMPOSITION MATHÉMATIQUE POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1884;

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE (¹),

PAR UN ANCIEN ÉLÈVE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

On donne une conique $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$; on joint un point M de cette conique aux deux foyers F et F'.

I. On demande d'exprimer les coordonnées du centre du cercle inscrit dans l'intérieur du triangle MFF', au moyen des coordonnées du point M.

II. Dans le cas où la conique donnée est une ellipse, on démontrera que, si l'on considère les cercles inscrits dans deux triangles correspondant à deux points M et M' de la conique, l'axe radical de ces deux cercles passe par le point milieu du segment MM'.

III. Pour chaque position du point M, le rayon vecteur FM touche le cercle correspondant en un point P : on déterminera en coordonnnées polaires l'équation du lieu décrit par le point P. (On prendra le foyer F pour origine des rayons et l'axe des x pour origine des angles.)

N. B. — Dans toutes ces questions il est nécessaire de distinguer le cas où la conique donnée est une ellipse de celui où elle est une hyperbole.

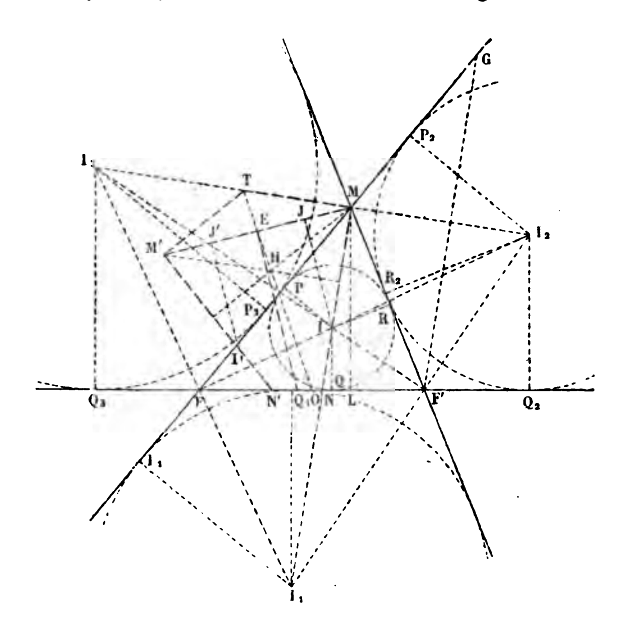
Traçons les cercles exinscrits au triangle FMF'. Soient I_1, I_2, I_3 leurs centres. La figure formée ainsi donne lieu à quelques propositions de Géométrie élé-

---

(¹) On n'attendait pas des candidats une solution de ce genre.

mentaire, utiles pour la suite et que je vais d'abord rappeler.

Les segments, tels que FQ$_2$, MP$_1$, ..., *sont égaux au demi-périmètre du triangle* FMF'; *un segment, tel que* MP, *compté à partir du sommet* M, *est égal au demi-*



périmètre du triangle FMF' *diminué de la longueur du côté* FF' *opposé à* M.

Le cercle inscrit et le cercle exinscrit qui ont leurs centres en I *et* I$_1$ *sur la bissectrice* MII$_1$ *intérieure au triangle* FMF', *touchent la base* FF' *aux points* Q *et* Q$_1$ *qui sont distants l'un de l'autre d'une longueur égale à la différence des côtés* MF, MF'.

Les cercles exinscrits, qui ont leurs centres en I$_2$, I$_3$ *sur la bissectrice* I$_2$MI$_3$ *extérieure au triangle* FMF', *touchent la base* FF' *aux points* Q$_2$, Q$_3$ *qui sont distants*

l'un de l'autre d'une longueur égale à la somme des côtés MF, MF'.

Les points Q, Q_1 *sont à égale distance du point* O *milieu de* FF', *il en est de même pour* Q_2 *et* Q_3.

Appelons $2c$ la longueur de la base FF' et a la longueur du segment OQ_2. Décrivons une circonférence tangente en Q_2 à la droite FF' et menons des points F, F' des tangentes à cette circonférence. Ces tangentes se coupent en un point tel que M qui, d'après ce que nous venons de rappeler, est tel que la somme de ses distances à F et F' est égale à $2\,OQ_2$. Le lieu de ce point, lorsqu'on fait varier le rayon de la circonférence tangente en Q_2 à FF', est donc une ellipse dont les foyers sont F et F' et dont le grand axe est Q_2Q_3. On obtient de la même manière cette ellipse en prenant les circonférences tangentes à FF' au point Q_3. En employant des circonférences tangentes en Q ou Q_1 à la droite FF', on obtient, au moyen du même mode de génération, une hyperbole dont les foyers sont F, F' et les sommets Q et Q_1.

Considérons d'abord l'ellipse (M) lieu des points de rencontre tels que M des tangentes menées de F et F' aux circonférences tangentes au point Q_2 à FF'.

Appelons x et y les coordonnées du point M; X, Y les coordonnées du point I; X_1, Y_1 les coordonnées du centre I_1, et ainsi de suite. On voit sur la figure que

$$\frac{y-Y}{Y}=\frac{MI}{IN}=\frac{FM}{FN}.$$

Menons F'G parallèlement à la bissectrice MN. Le dernier rapport est égal à $\frac{FG}{FF'}$, c'est-à-dire $\frac{a}{c}$; on a donc

$$\frac{y-Y}{Y}=\frac{a}{c},$$

d'où

$$(1) \qquad Y = \frac{c}{a+c}y.$$

Il résulte de là que : *quel que soit le point* M *sur l'ellipse* (M), *les centres tels que* I *partagent les normales* MN *en segments proportionnels.*

On démontre de la même manière le théorème analogue pour le centre I_1 situé comme I sur la normale MN à l'ellipse (M).

Pour déterminer la relation entre x et X, on peut s'appuyer sur le théorème que nous venons de démontrer et sur ce que la normale en M à (M) est partagée par les axes de cette courbe en segments proportionnels aux carrés des longueurs de ces axes; on y arrive aussi de la manière suivante.

On a

$$\frac{Q_1L \text{ ou } (X+x)}{QL \text{ ou } (x-X)} = \frac{I_1M}{IM} = \frac{P_1M}{PM} = \frac{a+c}{a-c},$$

d'où

$$(2) \qquad X = \frac{c}{a}x.$$

Les triangles semblables FQI, FQ_2I_2 donnent

$$\frac{Y_2}{Y} = \frac{c+a}{c+X}.$$

Introduisons les valeurs de Y et de X que nous venons de trouver, il vient

$$(3) \qquad Y_2 = \frac{ay}{a+x}.$$

On voit du reste facilement sur la figure que

$$Y_2Y_3 = a^2 - c^2, \quad \frac{1}{Y_2} + \frac{1}{Y_3} = \frac{2}{y}.$$

Passons au cas où le point M *décrit une hyperbole.*

Conservons les mêmes notations pour les coordonnées

de M et des centres I, I_1, ... La seule différence avec le cas précédent, c'est que OQ est maintenant égal à a. On pourrait, comme précédemment, déterminer les coordonnées des centres I, I_1 en fonction de x et y; mais on y arrive tout de suite en remplaçant, dans les formules (1), (2), (3), X par a et a par X_2. La relation (2) donne ainsi

$$(4) \qquad X_2 = \frac{cx}{a};$$

la formule (1) donne

$$(5) \qquad Y = \frac{cy}{X_2 + c} = \frac{ay}{x + a},$$

et enfin la formule (3) donne

$$(6) \qquad Y_2 = \frac{ay}{a + c}.$$

De cette dernière formule il résulte que :

Lorsque M décrit une hyperbole, les centres, tels que I_2, partagent les normales à l'hyperbole en segments proportionnels. On voit aussi qu'il en est de même des centres tels que I_3.

Les formules que nous venons de trouver répondent à la première partie de la question proposée. Elles permettent aussi de démontrer facilement que :

Lorsque M *décrit une ellipse, les centres* I *et* I_1 *décrivent des ellipses et, lorsque* M *décrit une hyperbole, les centres* I_2, I_3 *décrivent des hyperboles.*

Soient M'N' la normale en M' à l'ellipse (M) et I' le centre du cercle inscrit au triangle FM'F'. En vertu d'un théorème dû à M. Laguerre (que nous démontrerons plus loin) *les projections sur* MM' *des normales* MN, M'N' *sont égales*. Comme les centres I et I' partagent proportionnellement MN et M'N', *les projections* MJ, M'J' *des*

segments MI, M'I' *sur* MM' *sont aussi égales.* On a alors, en appelant E le point milieu du segment MM',

$$\overline{EI}^2 - \overline{EI'}^2 = \overline{IJ}^2 - \overline{I'J'}^2 = \overline{MI}^2 - \overline{M'I'}^2,$$

et, comme *les segments, tels que* MP, *sont de longueurs égales,* on voit que $\overline{MI}^2 - \overline{M'I'}^2$ est égal à la différence des carrés des rayons des cercles inscrits aux triangles FMF', FM'F'; par suite, *le point* E *appartient à l'axe radical de ces deux cercles.*

De la même manière, on arrive à cette propriété pour le cercle exinscrit dont le centre I_1 est sur la normale MN à l'ellipse et pour le cercle analogue dont le centre I'_1 est sur la normale en M' à cette courbe.

Dans le cas de l'hyperbole, on a aussi cette même propriété pour les deux couples de cercles dont les centres sont sur la normale en M à cette courbe et sur la normale à cette courbe en un second point. La deuxième partie de la question proposée est donc démontrée.

Il résulte des propriétés élémentaires rappelées précédemment que, pour le cas de l'ellipse, le segment FP_3 est égal à $a - c$ et le segment FP_2 est égal à $a + c$. *Le lieu des points* P_2 *et* P_3 *se compose donc de deux circonférences concentriques.* Le segment MP est aussi égal à $a - c$ et le segment MP_1 est égal à $a + c$. *Le lieu des points, tels que* P *et* P_1, *se compose donc de deux conchoïdes d'ellipse.*

L'équation en coordonnées polaires de l'ellipse (M) étant $\rho = \frac{a^2 - c^2}{a - c\cos\omega}$, l'équation en coordonnées polaires du lieu des points, tels que P, est

$$\rho = \frac{a^2 - c^2}{a - c\cos\omega} - (a - c).$$

Cette conchoïde a un point de rebroussement en F, et elle rencontre FF' à angle droit au point F'.

Dans le cas de l'hyperbole, *le lieu des points, tels que* P *et* P_1, *se compose de deux circonférences concentriques et le lieu des points, tels que* P_2 *et* P_3, *se compose de deux conchoïdes de l'hyperbole.*

Telle est la réponse à la troisième et dernière partie de la question posée.

Il nous reste à démontrer le théorème dont nous nous sommes servi dans la deuxième partie.

Pour cela, il suffit de faire voir que *la perpendiculaire à* MM′ *élevée du point* E, *milieu de cette corde, passe par les milieux des segments interceptés sur les axes de* (M) *par les normales* MN, M′N′ *à cette courbe.*

Les axes de l'ellipse (M) et la corde MM′ partagent dans le même rapport les normales MN, M′N′ à l'ellipse. Les droites, partagées par les axes et MM′ en segments dans ce même rapport, sont tangentes à une même parabole. Ces droites, à leur tour, déterminent sur MM′ et les axes de l'ellipse des segments proportionnels. Nous voyons ainsi déjà que la droite qui joint le point E au milieu du segment NN′ est une tangente à cette parabole. Pour prouver que cette droite rencontre MM′ à angle droit, il suffit de montrer que le point E appartient à la directrice de cette parabole. Je dis que *cette directrice est la droite qui joint le point* O *au point de rencontre* T *des tangentes en* M *et* M′ *à l'ellipse* (M).

D'abord le point O est un point de la directrice de la parabole, puisque les axes de l'ellipse M sont tangents à cette courbe et se rencontrent en O à angle droit. La droite OT contient le point E milieu de MM′; elle contient alors aussi le sommet H du parallélogramme formé par les tangentes TM, TM′, et les parallèles M′H, MH à ces tangentes. Il résulte de la construction du point H qu'il est le point de rencontre des hauteurs du triangle formé par la corde MM′ et les normales MN, M′N′ : triangle

qui est circonscrit à la parabole. On sait qu'alors ce point de rencontre des hauteurs est sur la directrice de la parabole; donc..., etc.

M. Laguerre a fait connaître son théorème dans le cas où l'on a une surface du deuxième ordre et les normales à cette surface en deux points M et M'.

On arrive à ce dernier théorème en considérant les projections des normales en M et M' sur un plan mené par MM' perpendiculairement à l'un des plans principaux de la surface du deuxième ordre et en faisant usage du théorème que nous venons de démontrer.

ÉTUDE DE DEUX SYSTÈMES SIMPLES DE COORDONNÉES TANGENTIELLES DANS LE PLAN : COORDONNÉES PARALLÈLES ET COORDONNÉES AXIALES

(voir p. 410)

PAR M. MAURICE D'OCAGNE,
Élève-Ingénieur des Ponts et Chaussées.

III. — COURBES EN GÉNÉRAL.

20. Nous ne ferons pas la théorie complète des courbes en u et v, qui est identiquement la même que celle des courbes en x et y lorsqu'on y permute les éléments point et droite.

Ainsi, le point de contact de la tangente (u_1, v_1) a pour équation

$$v - v_1 = \frac{dv_1}{du_1}(u - u_1),$$

et la recherche des tangentes à une courbe, issues d'un point donné, sera la même que celle des points de rencontre d'une courbe et d'une droite en coordonnées or-

dinaires. Nous n'avons pas à insister sur ces questions, qui rentrent dans le domaine des propriétés générales des systèmes de coordonnées tangentielles; mais nous devons faire ici quelques remarques spéciales au système qui nous occupe.

En premier lieu, remarquons que, les tangentes aux points de rencontre de la courbe $F(u, v) = o$ et de la droite (u_1, v_1) étant données par la résolution du système d'équations

$$F(u, v) = o, \quad u_1 F'_u + v_1 F'_v + F'_t = o,$$

où t est une variable, introduite pour l'homogénéité, que l'on fait ensuite égale à 1, on aura les u des points de rencontre de la courbe avec l'axe Au en résolvant le système d'équations

$$F(u, v) = o, \quad F'_v = o,$$

et les v des points de rencontre avec Bv en résolvant le système

$$F(u, v) = o, \quad F'_u = o.$$

21. Remarquons maintenant que les tangentes parallèles à une direction donnée sont obtenues par la résolution du système d'équations

$$F(u, v) = o,$$
$$v - u = k,$$

où k est une constante donnée.

Pour les tangentes parallèles à l'axe des origines, $k = o$.

Mais une droite parallèle aux axes de coordonnées ne saurait être définie par les coordonnées u et v. Toutes les droites parallèles aux axes, passant, en effet, par le point de rencontre de ces axes (situé à l'infini), ont même u et même v, tous deux infinis. Nous définirons de telles droites par leurs distances à l'un des axes,

comptées parallèlement à l'axe des origines, et que nous appellerons leurs abscisses, rapportées à l'axe considéré.

Proposons-nous dès lors de déterminer les tangentes à la courbe

$$F(u, v) = 0$$

(équation algébrique de degré m), parallèles aux axes.

Établissons d'abord un lemme.

L'équation algébrique, de degré m, la plus générale en u et v, peut s'écrire

$$\begin{aligned} 0 = {} & A_0 v^m + v^{m-1}(B_1 u + B_0) \\ & + v^{m-2}(C_2 u^2 + C_1 u + C_0) + \dots \\ & + (P_m u^m + P_{m-1} u^{m-1} + \dots + P_0). \end{aligned}$$

Divisons par v^m,

$$\begin{aligned} 0 = {} & A_0 + \frac{1}{v}(B_1 u + B_0) \\ & + \frac{1}{v^2}(C_2 u^2 + C_1 u + C_0) + \dots \\ & + \frac{1}{v^m}(P_m u^m + P_{m-1} u^{m-1} + \dots + P_0). \end{aligned}$$

Si l'axe Au est tangent à la courbe, ses coordonnées vérifieront cette équation; or les coordonnées de cet axe se composent d'une valeur finie quelconque k pour u et d'une valeur infinie pour v. L'équation précédente devra donc être vérifiée par

$$u = k, \quad \frac{1}{v} = 0,$$

ce qui exige que

$$A_0 = 0,$$

et la réciproque est évidente.

Soit donc maintenant à trouver les tangentes parallèles aux axes, pour la courbe

$$\begin{aligned} 0 = {} & A_0 v^m + v^{m-1}(B_1 u + B_0) \\ & + v^{m-2}(C_2 u^2 + C_1 u + C_0) + \dots \\ & + (P_m u^m + P_{m-1} u^{m-1} + \dots + P_0). \end{aligned}$$

Conservant le même axe Bv, transportons l'axe Au parallèlement à lui-même de la quantité α comptée le long de l'axe des origines, le point A restant sur cet axe.

Pour avoir la nouvelle équation de la courbe, appliquons les formules (6) et (6′) du n° 7 en y faisant $\beta = 0$, ce qui donne

$$u = \frac{du_1 - \alpha v_1}{d - \alpha}, \quad v = v_1.$$

L'équation demandée sera donc

$$\begin{aligned} 0 = A_0 v_1^m &+ v_1^{m-1}\left(B_1 \frac{du_1 - \alpha v_1}{d - \alpha} + B_0\right) \\ &+ v_1^{m-2}\left[C_2\left(\frac{du_1 - \alpha v_1}{d - \alpha}\right)^2 + C_1 \frac{du_1 - \alpha v_1}{d - \alpha} + C_0\right] + \ldots \\ &+ \left[P_m\left(\frac{du_1 - \alpha v_1}{d - \alpha}\right)^m + \ldots + P_0\right]. \end{aligned}$$

Déterminons α par la condition que le nouvel axe Au soit tangent à la courbe; pour cela, d'après le lemme précédent, annulons le coefficient du terme en v_1^m, ce qui donne

$$0 = A_0 + B_1 \frac{\alpha}{\alpha - d} + C_2\left(\frac{\alpha}{\alpha - d}\right)^2 + \ldots + P_m\left(\frac{\alpha}{\alpha - d}\right)^m,$$

équation du degré m en α dont les m racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ déterminent autant de tangentes parallèles à Au. Posant

$$\frac{\alpha}{\alpha - d} = z,$$

d'où

$$\alpha = \frac{dz}{z - 1},$$

nous pourrons énoncer ce résultat de la manière suivante :

Appelant $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ *les abscisses, rapportées à*

l'axe Au, *des tangentes parallèles aux axes de coordonnées, pour la courbe de la classe* m,

$$F(u, v) = 0,$$

ces abscisses seront déterminées par

$$\alpha_i = \frac{z_i d}{z_i - 1}$$

(i prenant toutes les valeurs $1, 2, \ldots, m$), $z_1, z_2, \ldots, z_m$ *étant les racines de l'équation que l'on obtient en remplaçant, dans l'ensemble homogène des termes de degré* m *de* $F(u, v)$, u *par* z *et* v *par* 1, *et en égalant ce polynôme à zéro.*

On déduit de là, comme corollaire, que la condition nécessaire et suffisante pour que deux courbes de la classe m aient les mêmes tangentes parallèles aux axes de coordonnées est que les équations de ces courbes contiennent la même partie homogène de termes de degré m. Nous utilisons plus loin cette remarque.

22. Dans le problème précédent, nous nous sommes seulement occupé de rechercher les droites, parallèles aux axes de coordonnées, qui sont tangentes à la courbe; mais on peut aussi se proposer de trouver les équations des points de contact de ces droites et de la courbe.

Il est aisé de déduire ce résultat de celui qui vient d'être obtenu, mais nous allons faire voir qu'on peut l'établir sans calcul, par une remarque bien simple.

Nous avons vu (n° 11) que le point à l'infini dans la direction des axes a pour équation $C = 0$; il est donc corrélatif de la droite de l'infini en coordonnées ordinaires : par conséquent, le problème qui consiste à trouver les points de contact des tangentes à une courbe, issues de ce point, est le même que celui qui consiste,

en coordonnées ordinaires, à trouver les tangentes à une courbe, en ses points d'intersection avec la droite de l'infini, c'est-à-dire à trouver ses asymptotes.

Par suite, on voit que :

L'équation de la courbe étant écrite, en groupant les termes de même degré,

$$\varphi_m(u, v) + \varphi_{m-1}(u, v) + \ldots + \varphi_1(u, v) + \varphi_0 = 0,$$

on aura les équations des points de contact de toutes les tangentes parallèles aux axes de coordonnées par la formule

$$u - z_i v + \frac{\varphi_{m-1}(z_i, 1)}{\varphi'_m(z_i, 1)} = 0$$

(*i* prenant toutes les valeurs 1, 2, ..., *m*, *où* z_i *est racine de l'équation*

$$\varphi_m(z, 1) = 0.$$

C'est, en effet, ce que l'on obtient par une recherche directe.

23. *Asymptotes.* — On voit immédiatement que les coordonnées des asymptotes, tangentes dont le point de contact est rejeté à l'infini, sont données par la résolution du système des deux équations

$$F(u, v) = 0$$

et

$$F'_u + F'_v = 0.$$

IV. — Application aux courbes du deuxième degré.

24. *Équation générale et équation réduite.* — L'équation générale des courbes du deuxième degré, dans ce système de coordonnées, est

$$Au^2 + 2Buv + Cv^2 + 2Du + 2Ev + F = 0.$$

On peut mettre cette équation sous une forme simple par un choix convenable d'axes de coordonnées.

Conservant d'abord le même axe des origines, prenons pour nouveaux axes de coordonnées les tangentes à la courbe, parallèles aux axes primitifs.

A cet effet, appliquons les formules de transformation du n° 7 et annulons (n° 21) les coefficients des termes en u^2 et v^2. Cela donne

$$A(d+\beta)^2 + 2B\beta(d+\beta) + C\beta^2 = o$$

et

$$A\alpha^2 - 2B\alpha(d-\alpha) + C(d-\alpha)^2 = o,$$

l'abscisse β étant comptée à partir de Bv, et α à partir de Au. Rapportons les deux abscisses à l'axe Au, en posant

$$\beta' = d + \beta;$$

nous avons ainsi, au lieu de la première équation,

$$A\beta'^2 - 2B\beta'(d-\beta') + C(d-\beta')^2 = o.$$

Donc les abscisses α et β' des tangentes parallèles aux axes, rapportées à l'axe Au, sont les racines de l'équation

$$Az^2 - 2Bz(d-z) + C(d-z)^2 = o$$

ou

$$(A + 2B + C)z^2 - 2d(B+C)z + Cd^2 = o.$$

Discutons cette équation.

Si $C = o$, l'une des racines est nulle et l'axe Au est tangent à la courbe, ce que nous savions.

Si $B + C = o$, les deux racines sont égales et de signes contraires; par suite, le centre de la courbe est situé sur Au. On verrait de même que, si $A + B = o$, le centre est sur Bv.

Si $A + 2B + C = o$, l'une des racines tend vers l'infini, c'est-à-dire qu'une des tangentes parallèle aux axes

est rejetée l'infini. *La courbe est donc alors une parabole.*

Si $(B+C)^2-(A+2B+C)C=B^2-AC=0$, les deux racines sont égales; les tangentes parallèles aux axes se confondent; la courbe est alors une hyperbole; les tangentes confondues donnent une asymptote.

Supposons que les deux tangentes soient distinctes et à distance finie. En les prenant pour axes de coordonnées, nous mettrons l'équation de la courbe sous la forme

$$Muv+Nu+Pv+Q=0.$$

Conservant maintenant les axes de coordonnées, changeons les origines en les transportant aux points de contact des nouveaux axes avec la courbe.

A cet effet, appliquons les formules de transformation du n° 6, et annulons les coefficients des termes en u et v; cela donne

$$Mb+N=0,$$
$$Ma+P=0;$$

et l'équation de la courbe devient, après réduction,

$$Muv-\frac{NP}{M}+Q=0$$

ou

$$uv=\frac{NP-MQ}{M^2}.$$

Telle est donc l'équation réduite des coniques à centre, en coordonnées parallèles.

25. *Nature de la courbe.* — Laissons de côté, pour le moment, cette forme simplifiée de l'équation des coniques, et voyons à quel caractère on peut reconnaître la nature d'une courbe du deuxième degré donnée.

Reprenons l'équation générale

$$Au^2 + 2Buv + Cv^2 + 2Du + 2Ev + F = 0.$$

Cherchons les tangentes parallèles à une direction donnée pour laquelle

$$u = v - k;$$

les v de ces tangentes seront donnés par

$$\begin{aligned} &A(v-k)^2 + 2Bv(v-k) \\ &\quad + Cv^2 + 2D(v-k) + 2Ev + F = 0, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} &(A + 2B + C)v^2 \\ &\quad + 2[-(A+B)k + D + E]v + Ak^2 - 2Dk + F = 0. \end{aligned}$$

Nous voyons d'abord que, si $A + 2B + C = 0$, une des racines v, quel que soit k, est infinie; l'une des deux tangentes parallèles à la direction donnée est rejetée à l'infini; la courbe est alors, comme d'ailleurs nous l'avons déjà vu, une *parabole*.

Supposons maintenant $A + 2B + C$ différent de o; la réalité des racines v dépend du signe de

$$\begin{aligned} \varphi(k) &= [-(A+B)k + D + E]^2 \\ &\quad - (A + 2B + C)(Ak^2 - 2Dk + F) \\ &= (B^2 - AC)k^2 - 2[(A+B)E - (B+C)D]k \\ &\quad + [(D+E)^2 - F(A + 2B + C)]. \end{aligned}$$

Voyons comment le signe de ce trinôme varie avec la valeur attribuée à k; à cet effet, formons la quantité

$$\begin{aligned} \mu &= [(A+B)E - (B+C)D]^2 \\ &\quad - (B^2 - AC)[(D+E)^2 - F(A + 2B + C)]. \end{aligned}$$

Après avoir développé cette valeur de μ et supprimé les termes qui se détruisent, on arrive à la mettre sous la forme

$$\mu = (A + 2B + C)[AE^2 - 2BDE + CD^2 + F(B^2 - AC)];$$

or

$$AF^2 - 2BDE + CD^2 + F(B^2 - AC) = \Delta,$$

discriminant de l'équation de la conique.

Posons

$$A + 2B + C = \Gamma.$$

La valeur de μ pourra alors s'écrire

$$\mu = \Gamma\Delta.$$

Supposons Δ différent de o, c'est-à-dire que la conique ne se réduise pas à un système de deux points.

Alors, si $\mu > 0$, le trinôme $\varphi(k)$ a ses racines réelles; par suite, quand on donne à k toutes les valeurs possibles, ce trinôme est tantôt positif, tantôt négatif; il en résulte que l'équation en v a, pour certaines valeurs de k, ses racines réelles, pour d'autres valeurs de k, ses racines imaginaires; la courbe est une *hyperbole*. Les racines de l'équation $\varphi(k) = 0$ donnent alors les directions asymptotiques.

En particulier, si $B^2 - AC = 0$, la valeur de μ, prise sous sa première forme, se réduit à

$$\mu = [(A + B)E - (B + C)D]^2,$$

quantité essentiellement positive; on a, par suite, une hyperbole; d'ailleurs, dans l'équation

$$\varphi(k) = 0,$$

le coefficient du terme en k^2 s'annulant, une des racines devient infinie, c'est-à-dire que la direction des axes de coordonnées est direction asymptotique. Nous avons déjà obtenu ce résultat au n° **24**.

Considérons maintenant le cas où $\mu = 0$, ou, puisque Δ est supposé différent de o, le cas où $\Gamma = 0$. L'équation

$$\varphi(k) = 0$$

a, dans ce cas, ses racines égales; les deux directions asymptotiques sont confondues; la courbe est une *parabole*.

Si $\mu < 0$, le trinôme $\varphi(k)$ a ses racines imaginaires; il conserve donc, pour toute valeur de k, le signe de son premier terme; par suite, si $B^2 - AC > 0$, le trinôme est constamment positif, l'équation en v a toujours ses racines réelles; on a une *ellipse réelle;* si $B^2 - AC < 0$, le trinôme est constamment négatif, l'équation en v a toujours ses racines imaginaires; on a une *ellipse imaginaire*.

Résumons cette discussion :

Les fonctions des coefficients de l'équation du second degré, caractéristiques de la nature de la conique représentée par cette équation, sont les suivantes :

$$AE^2 - 2BDE + CD^2 + F(B^2 - AC) = \Delta,$$
$$A + 2B + C = \Gamma,$$
$$B^2 - AC = \delta.$$

Si $\Delta = 0$, le premier membre de l'équation se décompose en un produit de facteurs linéaires : on a un système de points.

Si Δ est différent de o :

$\Gamma\Delta > 0$	hyperbole,	
$\Gamma = 0$	parabole,	
$\Gamma\Delta < 0$	ellipse	$\delta > 0$ réelle, $\delta < 0$ imaginaire.

26. *Centre.* — Le v de la droite médiane des deux tangentes, parallèles à la direction k, est donné par la demi-somme des racines de l'équation en v,

$$v = -\frac{(A + B)k + D + E}{A + 2B + C},$$

quant à l'u, il résulte de la formule

$$u = v + k.$$

L'élimination de k entre ces deux équations donne l'équation de la courbe enveloppée par cette droite médiane. On trouve

$$(A + B)u + (B + C)v + D + E = 0;$$

c'est l'équation d'un point. La droite médiane de deux tangentes parallèles est, en effet, un diamètre; l'équation que nous venons d'obtenir est celle du *centre* de la courbe.

Si $(A + B) + (B + C) = A + 2B + C = 0$, ce point est à l'infini; nous retrouvons ainsi la condition déjà obtenue par d'autres considérations, pour que la courbe soit une parabole.

Si $A + B = 0$, le centre se trouve sur l'axe Bv; si $B + C = 0$, il est sur l'axe Au; conditions déjà trouvées d'une autre manière au n° **24**.

Si $D + E = 0$, le centre est sur l'axe des origines.

Remarquons que, en écrivant l'équation de la courbe

$$F(u, v) = 0,$$

l'équation du centre peut s'écrire

$$F'_u + F'_v = 0.$$

27. *Directions conjuguées*. — Cherchons maintenant la direction conjuguée d'une direction donnée, c'est-à-dire la direction de la droite qui joint les points de contact des deux tangentes parallèles à une direction donnée.

La direction d'une droite, ainsi que nous l'avons déjà vu, est caractérisée par la différence des coordonnées de cette droite.

Pour toute droite parallèle à la direction donnée, nous

avons

$$v - u = k;$$

pour toute droite parallèle à la direction conjuguée,

$$v - u = k_1.$$

Le problème revient à trouver la relation qui existe entre k et k_1.

Menons par le centre de la conique donnée

$$F(u, v) = Au^2 + 2Buv + Cv^2 + 2Du + 2Ev + F = 0,$$

une droite dont les coordonnées sont u_1 et v_1. On a (n° 26)

$$F'_{u_1} + F'_{v_1} = 0.$$

Cette droite coupe la conique en deux points où les tangentes sont parallèles. Ces tangentes passent par le point dont l'équation est

$$uF'_{u_1} + vF'_{v_1} + F'_{t_1} = 0$$

ou, d'après l'égalité précédente,

$$(u - v)F'_{u_1} + F'_{t_1} = 0,$$

point qui est situé à l'infini.

On a donc, en appelant k le coefficient qui détermine la direction de ces tangentes,

$$k = v - u = \frac{F'_{t_1}}{F'_{u_1}} = \frac{Du_1 + Ev_1 + F}{Au_1 + Bv_1 + D}.$$

Or u_1 et v_1 sont liés par les relations

$$(A + B)u_1 + (B + C)v_1 + D + E = 0$$

et

$$v_1 - u_1 = k_1,$$

d'où l'on tire

$$u_1 = -\frac{(B + C)k_1 + D + E}{A + 2B + C},$$

$$v_1 = \frac{(A + B)k_1 - (D + E)}{A + 2B + C}.$$

Portant ces valeurs de u_1 et v_1 dans l'expression de k, on a, après réduction,

$$(B^2 - AC)kk_1 - [(A + B)E - (B + C)D](k + k_1) + [(D + E)^2 - F(A + 2B + C)] = 0.$$

Telle est la relation qui lie les constantes k et k_1, définissant deux directions conjuguées dans la conique considérée.

28. *Axes.* — Pour déterminer les axes, on adjoindra à l'équation précédente la formule (4) du n° 4

$$d^2 + kk_1 + d(k + k_1)\cos\theta = 0,$$

qui exprime la perpendicularité des directions définies par k et k_1, d étant la distance des origines et θ l'angle des axes de coordonnées avec l'axe des origines.

En éliminant k_1 entre ces deux équations, on a une équation du second degré en k, dont les racines donnent les valeurs de k et k_1, puisque les deux premières équations sont symétriques en k et k_1.

29. *Axe de la parabole.* — Dans le cas de la parabole, l'axe se détermine très aisément. L'équation du centre, situé à l'infini, peut s'écrire, en tenant compte de la condition $A + 2B + C = 0$,

$$(A + B)(u - v) + D + E = 0;$$

d'où l'on tire

$$v - u = k = \frac{D + E}{A + B}.$$

La direction de l'axe est ainsi déterminée.

Si $D + E = 0$, l'axe est parallèle à l'axe des origines.

Si $A + B = 0$, il est parallèle aux axes de coordonnées.

Si l'on a, à la fois, $A + B = 0$ et $D + E = 0$, on voit,

en tenant compte de la condition $A + 2B + C = 0$, que l'équation prend la forme

$$A(u - v)^2 + 2D(u - v) + F = 0;$$

elle représente alors un système de deux points situés à l'infini.

30. *Cercle.* — Reprenons la relation qui lie les coefficients k et k_1 de deux directions conjuguées

$$\begin{aligned}(B^2 - AC)kk_1 + [(B + C)D - (A + B)E](k + k_1)\\ + [(D + E)^2 - F(A + 2B + C)] = 0.\end{aligned}$$

Si la conique est un cercle, la direction définie par k_1 est perpendiculaire à la direction définie par k, quel que soit k. L'équation précédente doit donc être identique à la condition de perpendicularité

$$kk_1 + d(k + k_1)\cos\theta + d^2 = 0;$$

par suite, on doit avoir

$$\begin{aligned}B^2 - AC &= \frac{(B + C)D - (A + B)E}{d\cos\theta}\\ &= \frac{(D + E)^2 - F(A + 2B + C)}{d^2}.\end{aligned}$$

Telles sont les conditions pour que l'on ait un cercle.

Si les axes de coordonnées sont perpendiculaires à l'axe des origines, $\cos\theta = 0$, et ces conditions deviennent

$$\begin{aligned}(B^2 - AC)d^2 &= (D + E)^2 - F(A + 2B + C),\\ (B + C)D &= (A + B)E.\end{aligned}$$

(*A suivre.*)

QUELQUES PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES DES GROUPES PLUSIEURS FOIS TRANSITIFS;

PAR M. E. CESARO.

1. Soit G un groupe de substitutions, k fois transitif, de degré n. Soient

(1) $$s_1,\ s_2,\ s_3,\ \ldots,\ s_m$$

toutes les substitutions de G, pour lesquelles k éléments donnés x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, ..., x_{i_k} restent fixes. En vertu de sa transitivité, G contient certainement une substitution σ_α, qui fait succéder, aux k éléments donnés, k éléments quelconques x_{α_1}, x_{α_2}, x_{α_3}, ..., x_{α_k}, choisis parmi les n éléments que l'on considère. Toutes les substitutions

(2) $$s_1\sigma_\alpha,\ s_2\sigma_\alpha,\ s_3\sigma_\alpha,\ \ldots,\ s_m\sigma_\alpha$$

ont évidemment le même effet. De plus, si τ est une quelconque des substitutions qui font succéder les éléments x_α aux éléments x_i, il est clair que $\tau\sigma_\alpha^{-1}$ ne déplace pas les éléments x_i, et appartient, par conséquent, à la série (1). Or, de $\tau\sigma_\alpha^{-1} = s_\lambda$ on tire $\tau = s_\lambda\sigma_\alpha$. Donc, la ligne (2) contient *toutes* les substitutions qui changent les éléments x_i en éléments x_α. Observons, maintenant, que $\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\ldots\alpha_k$ est un arrangement de k indices, choisis parmi les nombres 1, 2, 3, ..., n. Il y a $n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$ de tels arrangements. Pour chacun d'eux, nous pouvons toujours trouver une substitution σ, et former, comme précédemment, une ligne analogue à (2). On construit ainsi un tableau de $n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$ lignes, dont chacune contient m substitutions. Ce tableau renferme, sans

omission, ni répétition, les substitutions de G. *Sans omission,* parce que, étant donnée une substitution de G, il suffit d'observer quels éléments elle fait succéder aux k éléments x_i, et de prendre, dans le tableau, la ligne correspondant à l'arrangement des indices de ces éléments. D'après ce qui a été dit, cette ligne contient nécessairement la substitution considérée. *Sans répétition,* parce que deux substitutions $s_\lambda\sigma$ et $s_\mu\sigma$, d'une même ligne, ne peuvent coïncider, sans que l'on ait $s_\lambda = s_\mu$; et deux substitutions, appartenant à deux lignes différentes, ne peuvent qu'être différentes, puisque, aux mêmes éléments x_i, elles font succéder des éléments différents, ou différemment disposés. Par conséquent, l'ordre r du groupe G est

$$m.n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1).$$

Si l'on observe, en outre, que les substitutions (1) forment un groupe G_1, sous-groupe de G, qui a la propriété de ne pas déplacer les éléments x_i, on peut énoncer la proposition suivante [1] :

Théorème. — *L'ordre d'un groupe* G, *transitif k fois, de degré n, est divisible par*

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1).$$

Le quotient est l'ordre des sous-groupes de G, *qui ne contiennent pas k éléments donnés.*

2. En examinant la série des substitutions $\sigma_\alpha^{-1}s_\lambda\sigma_\alpha$ $(\lambda = 1, 2, 3, \ldots, m)$, on voit immédiatement que le sous-groupe G_α, qui ne contient pas les k éléments x_α, est le transformé de G_1, moyennant σ_α. Il est donc semblable à G_1. Conséquemment, si ν_q est le nombre des substitutions de G_1, qui déplacent précisément q élé-

---

[1] Netto, *Substitutionentheorie,* p. 74, *Lehrsatz V.*

ments, ce nombre a la même valeur pour les autres sous-groupes. En outre, il est clair que, identiquement,

$$(3)\qquad m = \nu_{n-k} + \nu_{n-k-1} + \nu_{n-k-2} + \ldots + \nu_0,$$

où $\nu_0 = 1$. De même, si N_q est le nombre des substitutions de G, qui déplacent précisément q éléments, on a

$$(4)\qquad r = N_n + N_{n-1} + N_{n-2} + \ldots + N_0,$$

avec $N_0 = 1$. Cela posé, examinons l'ensemble des substitutions de tous les sous-groupes $G_1, G_2, \ldots, G_\alpha, \ldots$, dont le nombre est égal à celui des manières de choisir k éléments parmi les n donnés, c'est-à-dire à $C_{n,k}$. Parmi ces substitutions sont contenues sans omission, mais avec des répétitions possibles, les substitutions de G, qui ne déplacent pas plus de $n-k$ éléments. Si $q \geqq k$, chaque sous-groupe contient ν_{n-q} substitutions, qui déplacent précisément $n-q$ éléments, et le nombre total de ces substitutions, dans le groupe G, serait $C_{n,k}\nu_{n-q}$, si chacune d'elles n'était pas comptée en autant de sous-groupes qu'il y a de manières de choisir, parmi les q éléments qui doivent rester fixes, les k éléments, dont l'absence caractérise un sous-groupe. Donc

$$\begin{aligned} N_{n-q} &= \frac{C_{n,k}}{C_{q,k}}\nu_{n-q} \\ &= n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)\frac{\nu_{n-q}}{q(q-1)(q-2)\ldots(q-k+1)}\quad (q \geqq k). \end{aligned}$$

Substituant dans (4), et observant que

$$r = m.n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1),$$

on trouve

$$\begin{aligned} &N_n + N_{n-1} + \ldots + N_{n-k+1} \\ &\quad = n(n-1)\ldots(n-k+1) \\ &\qquad \times \left\{ m - \left[\frac{\nu_{n-k}}{k(k-1)\ldots 1} + \frac{\nu_{n-k-1}}{(k+1)k\ldots 2} + \ldots + \frac{\nu_0}{n(n-1)\ldots(n-k+1)}\right]\right\}. \end{aligned}$$

Enfin, en tenant compte de (3), et en posant

$$\varepsilon_{n-q} = 1 - \frac{1}{q(q-1)\ldots(q-k+1)},$$

on obtient

$$(5)\quad \begin{cases} N_n + N_{n-1} + \ldots + N_{n-k+1} \\ \quad = n(n-1)\ldots(n-k+1)(\varepsilon_{n-k}\nu_{n-k} + \varepsilon_{n-k-1}\nu_{n-k-1} + \ldots + \varepsilon_0\nu_0). \end{cases}$$

3. Des nombres ν on sait seulement qu'ils ne peuvent être négatifs, à l'exception de ν_0, qui est toujours 1. Par suite,

$$\begin{aligned} N_n + N_{n-1} + \ldots + N_{n-k+1} &\overline{\gtrless}\, n(n-1)\ldots(n-k+1)\varepsilon_0\nu_0 \\ &= n(n-1)\ldots(n-k+1) - 1. \end{aligned}$$

En d'autres termes :

Théorème. — *Un groupe du $n^{ième}$ degré, k fois transitif, a au moins $n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)-1$ substitutions, qui déplacent plus de $n-k$ éléments.*

Pour $k=1$, on a un théorème connu [1]. Pour $k=2$, on voit qu'un groupe doublement transitif, de degré n, a au moins n^2-n-1 substitutions, qui laissent un seul élément fixe, lorsqu'elles ne déplacent pas tous les éléments. Pour $k=n-2$, il doit y avoir au moins $3.4.5\ldots n-1$ substitutions, qui déplacent plus de deux éléments. En y joignant la substitution unité, on trouve au moins $\frac{1}{2}n!$ substitutions. Si l'on exclut le groupe symétrique, qui est n fois transitif, on voit que le groupe considéré est précisément le groupe alterné. Celui-ci, en effet, n'a pas de substitutions déplaçant seulement deux éléments. Il n'y a donc que le groupe alterné, qui *puisse* être $n-2$ fois transitif, et l'on sait que *réellement* il en est ainsi [2].

---

(1) Netto, *Substitutionentheorie*, p. 71, *Lehrsatz III*; dû à M. Jordan.

(2) Netto, *Substitutionentheorie*, p. 73.

4. Théorème. — *Tout groupe de degré n, transitif k fois, n'a pas de sous-groupe de même degré, et de même transitivité, qui ait en commun avec lui les substitutions déplaçant plus de n — k éléments.*

Soient G le groupe, et G′ un sous-groupe, qui possède les propriétés indiquées. Appliquons aux deux groupes la relation (5). Il vient, par soustraction,

$$(6)\quad \begin{cases} \varepsilon_{n-k}(\nu_{n-k} - \nu'_{n-k}) \\ \quad + \varepsilon_{n-k-1}(\nu_{n-k-1} - \nu'_{n-k-1}) + \ldots + \varepsilon_0(\nu_0 - \nu'_0) = 0. \end{cases}$$

Si $k \gtreqless 2$, les quantités ε sont essentiellement *positives*. D'autre part, puisque G′ est contenu dans G, les quantités placées entre parenthèses ne peuvent être *négatives*. Il est donc nécessaire qu'elles soient nulles, pour que la relation (6) ait lieu. En joignant ce résultat aux hypothèses faites, on voit que $N_q = N'_q$, *pour toute valeur de q*. Donc $G' = G$. Observons que, *pour* $k = 1$, *le théorème énoncé ne subsiste plus;* car, dans ce cas, $\varepsilon_{n-1} = 0$, et *les deux groupes peuvent différer par les substitutions qui déplacent précisément* $n - 1$ *éléments* (¹).

CORRESPONDANCE.

Lettre de M. Ph. Gilbert, Professeur à l'Université de Louvain.

Je vais, si vous le permettez, continuer avec M. le Dr Peano l'examen d'un point important d'Analyse.

Mes observations (même tome, p. 153) n'avaient pas « pour but de rien ajouter à la rigueur de la démonstra-

(¹) Netto, *Substitutionentheorie*, p. 72, *Lehrsatz VI*.

tion de M. Jordan », mais de prouver que l'objection de M. Peano contre cette démonstration ne suffisait pas, et de préciser le point défectueux de la démonstration.

L'objection était (même tome, p. 46) que, « si $f'(a_{r-1})$ est la limite de $\frac{f(a_r)-f(a_{r-1})}{a_r - a_{r-1}}$ quand on suppose a_{r-1} fixe et a_r s'approchant indéfiniment de a_{r-1}, on ne peut l'affirmer (en général) quand a_r et a_{r-1} varient en même temps : ce qui se vérifie sur l'exemple

$$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$$

avec

$$a_1 = \frac{1}{(2n+1)\pi}, \quad a_2 = \frac{1}{2n\pi}.$$

Cette objection tombe, comme je l'ai fait remarquer (même tome, p. 153), si l'on fait décroître les intervalles δ par l'intercalation successive de nouvelles valeurs *fixes* de x, comme cela est permis, et comme on le peut notamment dans l'exemple allégué (1).

Le vice de la démonstration de M. Jordan (et d'autres antérieures) n'est donc pas là. Il consiste, comme je l'ai dit (p. 154), en ce que, « lorsqu'on fait tendre simultanément vers zéro tous les intervalles δ », par l'intercalation successive de nouvelles valeurs de x, on peut supposer que la différence

$$\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta} - f'(x)$$

(1) « Dans mon exemple, dit M. Peano, on peut les supposer fixes et le raisonnement subsistera toujours, si les deux premières conservent la forme $\frac{1}{(2n+1)\pi}$, $\frac{1}{2n\pi}$. » Sans vouloir chicaner sur un point sans importance, je ferai remarquer que l'intervalle $a_2 - a_1$ entre ces deux valeurs consécutives ne peut décroître au-dessous de tout nombre donné, *ce que suppose essentiellement M. Jordan*, à moins que n ne devienne infini, c'est-à-dire que a_1 et a_2 tendent simultanément vers zéro.

reste toujours supérieure à une limite fixe pour un nombre fini ou indéfiniment croissant de valeurs de x, précisément parce qu'on en introduit toujours de nouvelles. C'est la « difficulté plus subtile » dont je parlais, et dont parlait sans doute M. Jordan en disant que sa démonstration suppose que le rapport des accroissements tende *uniformément* vers $f'(x)$.

Pour ce qui regarde la formule

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x+\theta h),$$

j'avoue avoir mal interprété ces termes de M. Peano : « qu'on la démontre très facilement *sans supposer la continuité de la dérivée* ». J'ai compris par là qu'il l'étendait à toutes les discontinuités possibles de la dérivée, tandis qu'il la suppose, pour chaque valeur de x, *finie, déterminée* et *égale dans les deux sens,* ce qui ramène au théorème fort connu de M. O. Bonnet, et restreint notablement la portée de la formule. C'est pour ce motif que je lui ai opposé un des genres de discontinuité qui se présentent le plus souvent dans la dérivée, et pour lequel l'équation ci-dessus ne peut s'appliquer, tandis que le théorème énoncé par M. Jordan subsiste. Je suis donc porté à croire ce dernier théorème plus général, et il serait à désirer qu'on l'établît rigoureusement dans toute sa généralité.

A cet égard, la proposition que M. Peano donne à démontrer ne peut être d'aucune utilité, parce qu'elle suppose précisément cette restriction que la dérivée $f'(x)$ soit *finie* et *unique* pour toute valeur de x dans l'intervalle (a, b), restriction que je voudrais écarter s'il se peut. En effet, M. Peano n'ignore pas que du moment où la dérivée $f'(x)$ a une valeur *unique* en chaque point, fût-elle même infinie en certains points, on démontre rigoureusement, *sans faire usage de la propo-*

sition qu'il énonce, que le rapport $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est compris entre la plus petite et la plus grande valeur de $f'(x)$ dans l'intervalle (a, b) (théorème de M. Jordan), et que cette propriété subsiste même pour certains cas où la fonction $f(x)$ elle-même est discontinue. La proposition en question ne peut donc servir à rien pour mon but, c'est pourquoi je n'ai pas beaucoup cherché à perfectionner la démonstration que je donne ci-dessous; mais, comme le théorème offre par lui-même quelque intérêt, j'espère que M. Peano voudra publier sa démonstration, qui sera sans doute meilleure.

Si $f(x)$ a une dérivée finie et déterminée* (¹) *pour toutes les valeurs de x appartenant à un intervalle fini (a, b), et si l'on fixe une quantité ε aussi petite qu'on le veut, il est toujours possible de diviser l'intervalle (a, b) en un nombre fini de valeurs de x :

$$a, \; a_1, \; a_2, \; \ldots, \; a_{n-1}, \; b,$$

de façon que chacune des différences

$$\frac{f(a_{r+1})-f(a_r)}{a_{r+1}-a_r}-f'(a_r) \quad (r=0,1,2,\ldots,n-1)$$

soit, en valeur absolue, moindre que ε.

Supposons $a < b$. D'après l'hypothèse, il est toujours possible de trouver une quantité déterminée et positive δ_1, telle que l'on ait en valeur absolue

$$\frac{f(a+\theta\delta_1)-f(a)}{\theta\delta_1}-f'(a) < \varepsilon,$$

θ désignant, *en général,* une quantité arbitraire > 0, et

(¹) La même dans les deux sens.

égale ou inférieure à l'unité. Prenons δ_1 le plus grand possible, et faisons $a + \delta_1 = a_1$. On pourra, de même, trouver une suite de quantités déterminées $\delta_2, \delta_3, \ldots$ telles que l'on ait toujours

$$\text{val. abs.} \left[\frac{f(a_1+\theta\delta_2)-f(a_1)}{\theta\delta_2} - f'(a_1)\right] < \varepsilon, \quad a_1+\delta_2 = a_2;$$

$$\text{val. abs.} \left[\frac{f(a_2+\theta\delta_3)-f(a_2)}{\theta\delta_3} - f'(a_2)\right] < \varepsilon, \quad a_2+\delta_3 = a_3,$$

et, en général,

$$(1) \qquad \text{val. abs.} \left[\frac{f(a_r+\theta\delta_{r+1})-f(a_r)}{\theta\delta_{r+1}} - f'(a_r)\right] < \varepsilon.$$

Les quantités $a, a_1, a_2, \ldots, a_r, \ldots$ formant une suite toujours croissante, deux hypothèses seulement sont possibles : 1° ou bien les intervalles $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_r, \ldots$ ne deviendront jamais plus petits qu'une quantité fixe δ, et dans ce cas, pour une valeur finie $n - 1$ du nombre r, on aura

$$a_{n-1} < b, \quad a_{n-1} + \delta_n \overline{\gtrless} b,$$

d'où, attribuant à θ une valeur convenable égale ou inférieure à 1, $a_{n-1} + \theta\delta_n = b$. Dans ce cas, en vertu de la relation (1), les quantités

$$a, \; a_1, \; a_2, \; \ldots, \; a_{n-1}, \; b$$

seront des valeurs de x qui satisferont à la condition demandée.

2° Ou bien les valeurs successives $a_1, a_2, \ldots, a_r, \ldots$, tout en croissant constamment, ne pourront atteindre la valeur b, ce qui exige que les intervalles $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_r, \ldots$ finissent par devenir moindres que toute grandeur donnée. Alors les quantités croissantes $a_1, a_2, \ldots, a_r, \ldots$ convergeront vers une limite fixe c, inférieure, ou tout au plus égale à b, de sorte que, entre $c - \sigma$ et c, quelque petite que soit la quantité positive σ, il existera

une infinité de ces quantités, a_p, a_{p+1}, ..., ou une infinité d'intervalles δ compris dans l'intervalle $(c-\sigma, c)$.

Mais, puisque c est compris entre a et b, la dérivée a pour $x=c$ une valeur unique et déterminée $f'(c)$. Il est donc toujours possible d'assigner un intervalle fini σ tel que l'on ait (θ ayant toujours la même signification que ci-dessus)

$$\text{val. abs.}\left[\frac{f(c-\theta\sigma)-f(c)}{-\theta\sigma}-f'(c)\right]<\frac{\varepsilon}{2}$$

ou, ce qui revient au même, en désignant par η une quantité qui dépend de θ, mais qui reste comprise entre -1 et $+1$,

$$(2)\qquad \frac{f(c)-f(c-\theta\sigma)}{\theta\sigma}=f'(c)+\eta\frac{\varepsilon}{2}.$$

D'autre part, d'après les hypothèses faites sur $f(x)$ et le théorème de M. Bonnet, on a

$$(3)\qquad \frac{f(c)-f(c-\theta\sigma)}{\theta\sigma}=f'(\xi),$$

ξ désignant une certaine valeur de x, telle que

$$c-\theta\sigma<\xi<c;$$

donc, si l'on combine les équations (2) et (3), on aura

$$(4)\qquad f'(\xi)=f'(c)+\eta\frac{\varepsilon}{2}.$$

Ainsi il existe nécessairement, dans l'intervalle $(c-\sigma, c)$ défini ci-dessus, au moins une valeur ξ de x, telle que la dérivée $f'(\xi)$ diffère de $f'(c)$ d'une quantité moindre, en valeur absolue, que $\frac{\varepsilon}{2}$.

Or, d'après une remarque faite plus haut, cette valeur ξ, ou coïncidera avec une des quantités a_p, a_{p+1}, ..., ou sera comprise entre deux d'entre elles, a_r et a_{r+1};

elle pourra donc se représenter par $a_r + \theta\delta_{r+1}$, en sorte qu'on aura, dans tous les cas, d'après (1),

$$(5) \qquad \text{val. abs.} \left[\frac{f(\xi)-f(a_r)}{\xi - a_r} - f'(a_r)\right] < \varepsilon.$$

Appliquons maintenant à cette valeur ξ de x la relation (2), en faisant, dans celle-ci, $c - \theta\sigma = \xi$; nous aurons

$$\frac{f(c)-f(\xi)}{c-\xi} = f'(c) + \eta' \frac{\varepsilon}{2},$$

η' étant compris entre -1 et $+1$. De là, en vertu de l'équation (4),

$$\frac{f(c)-f(\xi)}{c-\xi} = f'(\xi) + (\eta' - \eta) \frac{\varepsilon}{2},$$

où, $\eta' - \eta$ étant plus petit que 2,

$$(6) \qquad \text{val. abs.} \left[\frac{f(c)-f(\xi)}{c-\xi} - f'(\xi)\right] < \varepsilon.$$

Les inégalités (1), (5), (6) montrent que l'on peut passer *effectivement* de la valeur a à la valeur c par un nombre *fini* de valeurs de x

$$a, \; a_1, \; a_2, \; \ldots, \; a_r, \; \xi, \; c,$$

telles que deux valeurs consécutives x' et x'' vérifient toujours la relation

$$\frac{f(x'')-f(x')}{x''-x'} - f'(x') < \varepsilon$$

en valeur absolue.

En raisonnant sur l'intervalle (c, b) comme on a raisonné sur l'intervalle (a, b), on finira par établir qu'on peut toujours passer de a à b par un nombre fini d'intervalles δ, qui satisfont à la condition formulée dans l'énoncé du théorème.

On voit facilement quel changement subirait la démonstration si l'on avait $c = b$.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

1. Problèmes de Physique, de Mécanique, de Cosmographie, de Chimie à l'usage des candidats aux baccalauréats ès Sciences, au baccalauréat de l'enseignement spécial et aux Écoles du Gouvernement ; par *Edme Jacquier,* licencié ès Sciences mathématiques et physiques, professeur de l'Université, officier de l'Instruction publique, membre du Conseil supérieur de l'Instruction publique.

2. Traité élémentaire d'électricité ; par *James Clerk Maxwell,* publié par *William Garnett, M.-A.*, professeur de Physique à l'University College de Nottingham, précédé d'une Notice sur les travaux en électricité du professeur Maxwell par *W. Garnett.* Traduit de l'anglais par *Gustave Richard,* ingénieur civil des Mines.

3. Tirages a part. — *Sur le dernier théorème de Fermat; Note sur le degré des surfaces osculatrices; Commentaire arithmétique sur une formule de Gauss; Sur la règle de Newton* (démontrée par M. *Sylvester*) *pour trouver le nombre des racines imaginaires des équations numériques;* par M. E. de Jonquières.

(Extraits des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences.*) Paris, Gauthier-Villars ; 1884.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1450

(voir 3e série, t. II, p. 288);

PAR M. MORET-BLANC.

1° *La somme des $m^{\text{ièmes}}$ puissances des nombres premiers à* N, *et non supérieurs à ce nombre, est divisible par* N, *si m est impair;*

2° *La somme des produits m à m des nombres premiers à* N, *et non supérieurs à ce nombre, est divisible par* N, *si m est impair.* (E. CESARO.)

Les nombres premiers à N, et non supérieurs à ce nombre, peuvent être associés deux à deux : a et $N - a$, b et $N - b$, ... Ils sont en nombre pair, car on ne peut avoir $N - a = a$, ce qui donnerait $N = 2a$; a serait un diviseur de N, ce qui est contraire à l'hypothèse. On suppose $N > 2$.

1° m étant impair, la somme des puissances $m^{\text{ièmes}}$ de deux nombres associés $a^m + (N - a)^m$ est évidemment divisible par N, car les termes $a^m - a^m$ se détruisent, et tous les autres renferment le facteur N : donc la somme des puissances $m^{\text{ièmes}}$ de tous les nombres premiers à N, et non supérieurs à ce nombre, est divisible par N.

2° A tout produit de m de ces nombres en correspond un autre qui n'en diffère qu'en ce que l'un des nombres y est remplacé par son associé; leur somme est de la forme

$$Aa + A(N - a) = AN, \quad \text{multiple de N.}$$

Toutes ces sommes partielles étant divisibles par N, leur

somme, c'est-à-dire celle de tous les produits m à m des nombres premiers à N, et non supérieurs à ce nombre, est divisible par N.

Note. — La même question a été résolue par M. Louis M.

Question 1460

(voir 3ᵉ série, t. II, p. 382);

PAR M. MORET-BLANC.

Soient G *le centre de gravité d'un tétraèdre* ABCD; O_1, O_2, O_3, O_4 *les centres des sphères circonscrites aux tétraèdres* GBCD, GACD, GABD, GABC *respectivement. Le centre de gravité du tétraèdre* $O_1O_2O_3O_4$ *est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre donné.*

Même théorème pour le triangle et les cercles circonscrits. (GENTY.)

Prenons le centre O de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD pour origine des coordonnées rectangulaires, et soient x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3; x_4, y_4, z_4 les coordonnées des sommets A, B, C, D; ξ, η, ζ celles du point G; r le rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD, et d la distance OG.

Le point O_1 sera à l'intersection des plans perpendiculaires sur les milieux de GB, GC, GD, et aussi sur la perpendiculaire abaissée du point O sur la face BCD.

Les équations de trois plans sont

$$(x_2-\xi)\left(x-\frac{x_2+\xi}{2}\right)+(y_2-\eta)\left(y-\frac{y_2+\eta}{2}\right)+(z_2-\zeta)\left(z-\frac{z_2+\zeta}{2}\right)=0, \quad \ldots$$

ou

$$(x_2-\xi)x+(y_2-\eta)y+(z_2-\zeta)z=\frac{r^2-d^2}{2},$$

$$(x_3-\xi)x+(y_3-\eta)y+(z_3-\zeta)z=\frac{r^2-d^2}{2},$$

$$(x_4-\xi)x+(y_4-\eta)y+(z_4-\zeta)z=\frac{r^2-d^2}{2}.$$

En ajoutant ces équations membre à membre, pour plus de symétrie, on a l'équation

$$(\xi-x_1)x+(\eta-y_1)y+(\zeta-z_1)z=\frac{3(r^2-d^2)}{2},$$

qui, avec celles de la perpendiculaire abaissée du point O sur la face BCD, déterminera le point O_1.

La direction de Ox étant arbitraire, prenons la perpendiculaire au plan BCD, alors on aura, pour le point O_1,

$$y=0,\quad z=0,$$

$$x=OO_1=\frac{3(r^2-d^2)}{2(\xi_1-x_1)}=\frac{2(r^2-d^2)}{\frac{4}{3}(\xi-x_1)}=\frac{2(r^2-d^2)}{h_1},$$

en désignant par h_1 la hauteur du tétraèdre correspondant à la base BCD. Si l'on nomme B_1 cette face et V le volume du tétraèdre, on a

$$h_1=\frac{3V}{B_1}$$

et

$$OO_1=\frac{2(r^2-d^2)}{3V}B_1,$$

de même

$$OO_2=\frac{2(r^2-d^2)}{3V}B_2,$$

$$OO_3=\frac{2(r^2-d^2)}{3V}B_3,\quad OO_4=\frac{2(r^2-d^2)}{3V}B_4.$$

Les longueurs OO_1, OO_2, OO_3, OO_4 sont donc proportionnelles aux faces du tétraèdre auxquelles elles sont perpendiculaires.

Or, si l'on projette sur un plan quelconque les faces d'un tétraèdre, les projections étant affectées du même signe ou de signes différents suivant qu'elles sont ou non du même côté de la face projetée que le sommet qui lui est opposé, la somme algébrique des projections est nulle; il en sera de même en projetant sur un axe les perpendiculaires à ces faces, proportionnelles à leurs aires.

Il résulte de là que quatre forces, représentées par OO_1, OO_2, OO_3, OO_4, se font équilibre, et, par suite, d'après un théorème connu, que le point O est le centre de gravité du tétraèdre $O_1O_2O_3O_4$.

Un calcul et un raisonnement tout semblables appliqués à un triangle ABC prouvent que le centre de gravité du triangle ayant pour sommets les centres des cercles qui passent par deux sommets du triangle ABC et par son centre de gravité est le centre du cercle circonscrit à ABC.

De ce qui précède résultent aussi les théorèmes suivants :

I. *Si deux tétraèdres sont tels que les médianes* (¹) *du premier soient perpendiculaires aux faces du second, réciproquement les médianes du second seront perpendiculaires aux faces du premier.*

II. *Si, à partir du centre de la sphère circonscrite à un tétraèdre, on porte sur les perpendiculaires aux faces des longueurs proportionnelles à leurs aires, les quatre extrémités sont les sommets d'un second tétraèdre; ce tétraèdre et le premier jouissent de la propriété énoncée dans le théorème précédent; de plus, le centre de gra-*

(¹) J'appelle *médiane d'un tétraèdre* la droite qui joint un sommet au centre de gravité de la face opposée.

vité du second est le centre de la sphère circonscrite au premier.

Théorèmes analogues pour le triangle.

Question 1464

(voir 3ᵉ série, t. II, p. 383);

PAR M. LÉON CLÉMENT,
Du lycée de Rouen (Mathématiques spéciales).

L'énoncé doit être rectifié comme il suit :

On donne deux paraboles $y^2 = 2c(x \pm c)$; *une tangente à l'une de ces paraboles rencontre l'autre aux points* P, Q; *sur* PQ, *comme diamètre, on décrit un cercle qui rencontre la seconde parabole en deux nouveaux points* R, S : *prouver que la droite* RS *est tangente à la seconde parabole.*

Transportons les axes de coordonnées parallèlement à eux-mêmes au point $x = c$, $y = 0$. Les équations des paraboles deviendront

(A) $$y^2 = 2cx$$

et

(B) $$y^2 = 2cx + 4c^2.$$

Soient $y - \alpha x - \dfrac{c}{2\alpha} = 0$ l'équation de la tangente PQ à la parabole (A), et $y + \alpha x + \beta = 0$ l'équation de la droite RS.

L'équation générale des coniques passant par les points d'intersection P, Q, R, S des droites PQ, RS, avec la parabole (B), est

$$\lambda(y^2 - 2cx - 4c^2) + \left(y - \alpha x - \frac{c}{2\alpha}\right)(y + \alpha x + \beta) = 0$$

ou

$$-\alpha^2x^2 + \lambda + 1)y^2$$
$$-\left(2c\lambda + \frac{c}{2} + \alpha\beta\right)x - \left(\frac{c}{2\alpha} - \beta\right)y + \frac{\beta c}{2\alpha} - 4\lambda c^2 = 0.$$

Pour que cette dernière équation représente un cercle, il faut que $\lambda = -(1 + \alpha^2)$.

L'équation du cercle devient alors

$$\alpha^2x^2 + \alpha^2y^2 + \left(\alpha\beta - \frac{3c}{2} - 2c\alpha^2\right)x$$
$$+ \left(\frac{c}{2\alpha} - \beta\right)y + \frac{\beta c}{2\alpha} - 4c^2(1 + \alpha^2) = 0.$$

Exprimons que le centre de ce cercle est sur la droite PQ.

Les coordonnées de ce centre sont données par les équations

$$2\alpha^2x + \alpha\beta - \frac{3c}{2} - 2c\alpha^2 = 0,$$

et

$$2\alpha^2y + \frac{c}{2\alpha} - \beta = 0,$$

équation qui peut s'écrire

$$2\alpha y + \frac{c}{2\alpha^2} - \frac{\beta}{\alpha} = 0.$$

Il faut éliminer x et y entre ces deux équations et l'équation de la droite PQ, qui est $y - \alpha x = \frac{c}{2\alpha}$.

Les équations du centre donnent, en les retranchant membre à membre,

$$2\alpha(y - \alpha x) + \frac{c}{2\alpha^2} - \frac{\beta}{\alpha} - \alpha\beta + \frac{3c}{2} + 2c\alpha^2 = 0;$$

d'où, en ayant égard à l'équation de PQ,

$$c + \frac{c}{2\alpha^2} - \frac{\beta}{\alpha} - \alpha\beta + \frac{3c}{2} + 2c\alpha^2 = 0,$$

ce qui revient à

$$4c^4 + c\alpha^2 - 2\alpha^2\beta + 4c\alpha^2 + c - 2\alpha\beta = 0$$

ou

$$\alpha^2(4c\alpha^2 + c - 2\alpha\beta) + 4c\alpha^2 + c - 2\alpha\beta = 0,$$
$$(\alpha^2 + 1)(4c\alpha^2 + c - 2\alpha\beta) = 0,$$
$$4c\alpha^2 + c - 2\alpha\beta = 0.$$

Or cette dernière équation exprime précisément que la droite RS, $y + \alpha x + \beta = 0$, est tangente à la parabole (B).

Le cercle décrit sur PQ comme diamètre est donc tangent à la parabole (B) ([1]).

([1]) Un calcul assez simple détermine avec précision le point de contact de ces deux courbes. Il est d'abord évident que les axes des paraboles (A), (B) coïncident avec l'axe des x, et que, par suite, toute droite parallèle à l'axe des x est un diamètre commun aux deux courbes. Il résulte aussi des équations de (A) et (B) que la partie d'un diamètre comprise entre les deux paraboles est constamment égale à leur paramètre $2c$.

Cela admis, soient a le point de contact de la tangente PQ à la parabole (A), et ab une parallèle à l'axe des x, rencontrant la parabole (B) au point b. La tangente menée à (B), au point b, sera parallèle à PQ, parce que les ordonnées des points b, a sont égales entre elles, et que les deux paraboles ont le même paramètre $2c$. Donc le diamètre ba de (B) divise en deux parties égales la corde PQ de (B); par conséquent, le point a est le centre du cercle décrit sur PQ comme diamètre.

En nommant α le coefficient angulaire de la tangente PQ, l'ordonnée du point de contact a est $\frac{c}{\alpha}$, et l'abscisse $\frac{c}{2\alpha^2}$: ce sont les coordonnées du centre du cercle considéré; la valeur de son rayon $\frac{PQ}{2}$ ou aP résulte du calcul suivant.

L'équation de la parabole (A), rapportée à son diamètre ba et à sa tangente PQ, est $y'^2 = 2\left(\frac{c}{\alpha^2} + c\right)x'$.

Pour $x' = 2c$, $y'^2 = \frac{4c^2}{\alpha^2} + 4c^2$. Or $y' = aP$, parce que $2c = ba$; donc le carré du rayon du cercle est égal à $\frac{4c^2}{\alpha^2} + 4c^2$.

Actuellement soit b' le point symétrique de b, par rapport à

Question 1487

(voir 3e série, t. III, p. 160);

PAR M. J. RICHARD,
Élève au lycée Saint-Louis.

A un triangle ABC *on circonscrit une conique de centre* (x, y, z). *On sait que les droites qui joignent chaque sommet du triangle au pôle du côté opposé se coupent en un même point* (x', y', z'). *Démontrer qu'il y a réciprocité entre les points* (x, y, z), (x', y', z'), *et que cette réciprocité est définie par les relations*

$$\frac{yz' + zy'}{a} = \frac{zx' + xz'}{b} = \frac{xy' + yx'}{c},$$

où a, b, c *sont les côtés de* ABC. (E. CESARO.)

En désignant par x, y, z les distances d'un point du plan du triangle aux côtés BC, AC, AB, l'équation d'une conique circonscrite au triangle est

$$(1) \qquad \lambda yz + \mu zx + \nu xy = 0,$$

---

l'axe des x. Le triangle $b'ba$ rectangle en b donne $\overline{ab'}^2 = \overline{bb'}^2 + \overline{ba}^2$. Mais, en valeur absolue, bb', qui est le double de l'ordonnée de b, est égal à $\frac{2c}{a}$, et $ba = 2c$; il s'ensuit $\overline{ab'}^2 = \frac{4c^2}{a^2} + 4c^2 = \overline{aP}^2$, d'où $ab' = aP$. Ainsi, le point b' appartient au cercle dont PQ est diamètre.

De plus, la droite ab' est normale à la parabole (B) au point b'. Car, soient g et h les pieds des ordonnées de a et b', et m le point d'intersection de ab' et de l'axe des x; on a évidemment

$$mh = mg = \frac{hg}{2} = \frac{ba}{2} = c,$$

c'est-à-dire que la projection de mb' sur l'axe de la parabole (B) est égale à la moitié du paramètre de (B). Donc mb' est normale à (B). Par conséquent, le cercle décrit sur PQ comme diamètre est tangent à la parabole (B), au point b'. G.

et la droite de l'infini a pour équation

$$(2) \qquad ax + by + cz = 0.$$

Nous exprimerons qu'un point (x, y, z) est centre de la conique en écrivant que la polaire de ce point coïncide avec la droite de l'infini, ce qui donne

$$(3) \qquad \frac{\nu y + \mu z}{a} = \frac{\lambda z + \nu x}{b} = \frac{\mu x + \lambda y}{c}.$$

D'autre part, cherchons l'équation de la droite qui joint le sommet A du triangle au pôle du côté opposé BC. Le pôle de ce côté est, sur chacune des tangentes à la conique, en B et C, c'est-à-dire sur les droites représentées par les équations

$$\frac{z}{\nu} + \frac{x}{\lambda} = 0, \quad \frac{x}{\lambda} + \frac{y}{\mu} = 0.$$

Par conséquent, ses coordonnées x', y', z' vérifient l'équation $\frac{y}{\mu} - \frac{z}{\nu} = 0$, qu'on obtient en retranchant, membre à membre, les deux équations précédentes.

Les coordonnées x', y', z' du point de concours des droites qui joignent chacun des sommets du triangle au pôle du côté opposé vérifient donc les trois équations

$$\frac{y'}{\mu} - \frac{z'}{\nu} = 0, \quad \frac{z'}{\nu} - \frac{x'}{\lambda} = 0, \quad \frac{x'}{\lambda} - \frac{y'}{\mu} = 0,$$

ce qui montre que x', y', z' sont proportionnelles à λ, μ, ν.

En remplaçant λ, μ, ν par x', y', z' dans les équations (3) qui sont homogènes, on a

$$\frac{yz' + zy'}{a} = \frac{zx' + xz'}{b} = \frac{xy' + yx'}{c}.$$

Ce sont précisément les relations qu'il fallait démontrer.

Ces relations ne changent pas lorsqu'on y permute les

coordonnées x', y', z' avec les coordonnées x, y, z. Il y a donc réciprocité entre les deux points.

Note. — La même question a été résolue par MM. Goffart et Moret-Blanc.

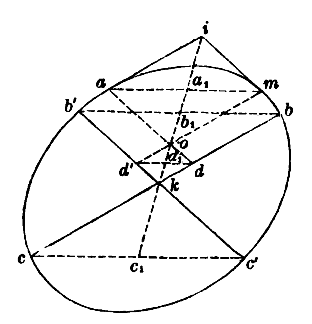
Question 1494

(voir 3e série, t. III, p. 352);

PAR M. N. GOFFART.

Soient a et m deux points quelconques d'une conique, b et c les extrémités d'une corde parallèle à la tangente en a. Menons par les points b et c des parallèles à la droite am, qui rencontre la conique aux points b' et c' respectivement; la droite b'c' est parallèle à la tangente au point m. (GENTY.)

Soient d et d' les milieux de bc et $b'c'$. Les droites am, bb', cc', dd' sont parallèles, et leurs milieux a_1, b_1,



c_1, d_1 sont situés sur le diamètre conjugué à la direction am, lequel passe au point de concours k des diagonales du trapèze $bb'cc'$ et au pôle i de am.

Or, ad, étant le diamètre conjugué à la direction ai, coupe ik au centre o de la conique (ou lui est parallèle, dans le cas de la parabole). Mais il résulte de la simili-

tude des triangles dod_1 et aoa_1 (angle $d = a$, $d_1 = a_1$) que les triangles d_1od' et a_1om sont aussi semblables

$$\left(d_1 = a_1, \quad \frac{od_1}{oa_1} = \frac{d_1d'}{a_1m} = \frac{dd_1}{aa_1}\right),$$

et par suite que $d'om$ est une ligne droite; c'est donc le diamètre conjugué à la direction $b'c'$ et par suite mi est parallèle à $b'c'$.

Note. — M. Victor de Strékalof, à Saint-Pétersbourg, et MM. Pisani et Moret-Blanc ont donné, de même, une solution géométrique de la question proposée; MM. L. Amouroux, du lycée de Grenoble, et J. Richard l'ont résolue par les formules de la Géométrie analytique.

Question 1499

(voir 3ᵉ série, t. III, p. 400);

PAR M. J. RICHARD.

On donne l'arête de base et la hauteur d'une pyramide régulière dont la base est un carré. Trouver l'angle compris entre deux faces latérales.

(GENEIX-MARTIN.)

Soient SABCD la pyramide, h la hauteur SO, a l'arête de la base [1].

Le plan SBD étant perpendiculaire à la diagonale AC, on peut mener par AC un plan perpendiculaire à SB. Soit M le point où ce plan rencontre SB. Il s'agit d'évaluer l'angle AMC.

On a d'abord

$$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{OC} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

et

$$\mathrm{SB} = \sqrt{\mathrm{OB}^2 + h^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} + h^2}.$$

---

[1] Le lecteur est prié de faire la figure.

Dans le triangle rectangle SOB,

$$OM \times SB = SO \times OB$$

ou

$$OM \times \sqrt{\frac{a^2}{2} + h^2} = \frac{ah}{2};$$

d'où

$$OM = \frac{ah}{\sqrt{a^2 + 2h^2}}.$$

Or

$$\tang \tfrac{1}{2} AMC = \tang AMO = \frac{AO}{MO}$$

$$= \frac{\frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{a^2+2h^2}}{ah} = \frac{\sqrt{2a^2+4h^2}}{2h}.$$

Par conséquent, la tangente de la moitié de l'angle cherché est égale à $\frac{\sqrt{2a^2+4h^2}}{2h}$.

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc et Goffart.

Question 1501

(voir 3e série, t. III, p. 400);

PAR M. MORET-BLANC.

Par le sommet A *d'un triangle* ABC, *on mène des perpendiculaires aux côtés* AB, AC, *qui rencontrent en* D *et* E *la circonférence circonscrite au triangle. Démontrer que le quadrilatère* ADBE (*ou* ADCE) *est équivalent au triangle.* (B. REYNOLDS, M. A.)

On a, R étant le rayon du cercle circonscrit au triangle,

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{AD}{\cos C} = \frac{AE}{\cos B} = 2R,$$

$$\text{surf. } ABC = \tfrac{1}{2} AB.AC \sin A = 2R^2 \sin A \sin B \sin C,$$

$$\text{surf. } ABD = \tfrac{1}{2} AB.AD = 2R^2 \sin C \cos C,$$

$$\text{surf. } ABE = \tfrac{1}{2} AB.AE \cos A = 2R^2 \sin C \cos A \cos B,$$

d'où

$$\text{surf. ADBE} = 2R^2 \sin C(\cos C + \cos A \cos B);$$

mais

$$\cos C = -\cos(A + B) = \sin A \sin B - \cos A \cos B,$$

donc

$$\text{surf. ADBE} = 2R^2 \sin A \sin B \sin C = \text{surf. ABC}.$$

On trouve de même

$$\text{surf. ADCE} = \text{surf. ABC}.$$

En projetant la figure sur un plan quelconque, on a ce théorème plus général :

Par le sommet A *d'un triangle* ABC *inscrit dans une ellipse, on mène les cordes* AD, AE *respectivement supplémentaires de* AB *et* AC. *Le quadrilatère* ADBE (*ou* ADCE) *est équivalent au triangle.*

Nota. — La même question a été résolue par M. Goffart.

QUESTIONS.

1509. ABC étant un triangle donné, on joint ses sommets à un point U de son plan par des lignes droites, qui coupent les côtés BC, CA, AB en A′, B′, C′; soient

a	le milieu de	BC,	a'	le milieu de	AA′,
b	»	CA,	b'	»	BB′,
c	»	AB,	c'	»	CC′;

les trois droites aa', bb', cc' concourent au point M, centre de la conique qui touche les côtés du triangle aux points A′, B′, C′. Cela posé, on a la relation

$$\frac{OA.OB.OC}{OA'.OB'.OC'} = \frac{Ma.Mb.Mc}{Ma'.Mb'.Mc'},$$

(H. Schröter.)

1510. La conique inscrite au triangle ABC touche les côtés BC, CA, AB aux points A′, B′, C′. Les milieux a, b, c des côtés BC, CA, AB ont des polaires relatives à la

conique inscrite; ces polaires forment un autre triangle, dont l'aire est égale à l'aire du triangle ABC.

(H. Schröter.)

1511. On donne au hasard, dans un plan, quatre points, et l'on en prend un comme centre d'une conique passant par les trois autres. Démontrer que cette conique est, avec autant de probabilité, une ellipse ou une hyperbole. (E. Cesaro.)

1512. Trouver l'enveloppe d'une parabole dont le foyer et un point de la directrice sont fixes.

(D'Ocagne.)

1513. On donne un triangle ABC, une conique K et un point O sur cette conique. Les droites OA, OB, OC coupent la conique K respectivement aux points A', B', C'. De plus, le côté BC rencontre cette conique aux points A'', A'''; le côté AC aux points B'', B'''; le côté AB aux points C'', C'''. Démontrer que les triangles $A'A''A'''$, $B'B''B'''$ et $C'C''C'''$ sont circonscrits à une même conique.

(D'Ocagne.)

1514. Par les sommets d'un triangle ABC, on mène aux côtés opposés des droites AD, BE, CF se coupant en un même point O; on a

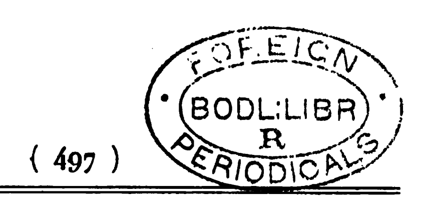
$$\frac{AO}{AD} + \frac{BO}{BE} + \frac{CO}{CF} = 2.$$

De même, si, par les sommets d'un tétraèdre ABCD, on mène aux faces opposées des droites AE, BF, CG, DH se coupant en un même point O, on a

$$\frac{AO}{AE} + \frac{BO}{BF} + \frac{CO}{CG} + \frac{DO}{DH} = 3.$$

(Genty.)

Note. — La question 1465 a été résolue par M. Ph. Anstell, élève au Lycée de Lyon; la question 1492, par M. Victor de Strégalof; et les questions 1467, 1473, par M. Louis M.



SUR UNE MANIÈRE D'INTERPRÉTER L'ARTICLE RELATIF A LA MÉCANIQUE DU NOUVEAU PROGRAMME D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE (PHYSIQUE);

Par UN ANCIEN PROFESSEUR DE L'UNIVERSITÉ.

L'article dont il s'agit a pour titre :

Notions succinctes de Mécanique servant de base a l'étude de la pesanteur. — *Mouvement rectiligne uniforme, et uniformément varié; vitesse; accélération; composition de ces mouvements; notions sommaires sur les couples, la composition et l'équilibre des forces appliquées à un corps solide; notions sommaires sur le travail et la force vive.*

Cet énoncé très sommaire pourrait peut-être donner lieu à quelques méprises en ce qui concerne la marche à suivre et les modes de démonstrations qu'il convient d'adopter pour satisfaire aux conditions du programme. J'ai pensé qu'il pourrait être utile aux professeurs de Physique de donner un sens précis à l'état de la question : c'est ce qui m'a conduit à rédiger cette Note, basée, d'ailleurs, sur des renseignements pris à la source, tout en ne relevant que les points principaux.

§ I. — Cinématique.

I. — *Mouvement uniforme en ligne droite d'un point géométrique; chemin parcouru* $(s = at)$; *vitesse.*

II. — *Mouvement uniformément varié en ligne droite* $\left(s = at + \frac{bt^2}{2}\right)$, *accéléré, retardé.*

Au bout du temps $t + \theta$, s deviendra

$$s + \sigma = a(t + \theta) + \frac{b}{2}(t^2 + 2t\theta + \theta^2);$$

d'où

$$\sigma = a\theta + bt\theta + \frac{b\theta^2}{2}$$

et

$$\frac{\sigma}{\theta} = a + bt + \frac{b\theta}{2}.$$

Si θ diminue indéfiniment, $\frac{\sigma}{\theta}$ a pour limite

$$(1) \qquad V = a + bt,$$

et c'est cette limite qui a reçu le nom de *vitesse* au bout du temps t.

La constante a est la *vitesse initiale* ou la valeur de V qui correspond à $t = 0$.

La constante b est l'*accélération* du mouvement.

Considérons s comme une ordonnée, et t comme une abscisse, en supposant rectangulaires les axes Os, Ot menés par le point de départ O, c'est-à-dire à partir duquel il est convenu de mesurer le temps. L'équation

$$(2) \qquad s = at + \frac{bt^2}{2}$$

représentera une parabole du second degré dont le coefficient angulaire donnera la valeur de V.

Des équations (1) et (2) on déduit

$$s = \frac{t}{2}(2a + bt) = \frac{(a + V)t}{2};$$

d'où ce théorème : *Le chemin parcouru au bout du temps t est le même que celui du mouvement uniforme dans lequel la vitesse serait la moyenne des vitesses extrêmes.*

III. — *Digression sur les résultantes géométriques.*

Soient ab, bc, cd, ..., hk des droites de longueurs et de directions déterminées, placées bout à bout en par-

tant de l'origine a. La droite ak sera la résultante géométrique des droites ci-dessus.

Cas particuliers. — 1° La résultante de deux droites est la diagonale du parallélogramme construit sur ces droites, menées par le point de départ a;

2° La résultante de trois droites est la diagonale du parallélépipède construit sur ces droites partant d'une même origine.

IV. — *Composition et décomposition des mouvements rectilignes et uniformes.*

Soient

$$\mathrm{O}m = s = at,$$

$\mathrm{O}x$, $\mathrm{O}y$ deux droites quelconques, menées dans un plan passant par $\mathrm{O}m$; m_x, m_y les projections de m sur $\mathrm{O}x$, $\mathrm{O}y$, déterminées par des parallèles à $\mathrm{O}y$ et $\mathrm{O}x$; a_x, a_y les projections semblables de la longueur a mesurée à partir de O sur la direction de $\mathrm{O}m$.

Je considère maintenant comme mobile le point m_x, et je suppose que la droite $\mathrm{O}x$ se transporte parallèlement à elle-même avec la vitesse a_y. Il est clair qu'au bout du temps t le point m_x coïncidera avec m.

On voit ainsi que : 1° le mouvement du point m peut être considéré comme résultant de deux mouvements simultanés parallèles à $\mathrm{O}x$, $\mathrm{O}y$, et que a est la résultante géométrique de a_x, a_y; 2° la vitesse d'un point mobile peut être décomposée géométriquement en deux autres vitesses de directions données, à la condition que tout se passe dans un même plan.

La vitesse suivant $\mathrm{O}x$ pouvant être considérée comme étant la résultante de deux autres vitesses, on est conduit à poser en principe que :

La vitesse d'un point animé d'un mouvement rectiligne uniforme peut être regardée comme étant la ré-

sultante géométrique d'autres vitesses de directions données.

Les considérations qui précèdent s'appliquent au mouvement uniformément accéléré; car, d'après la formule (1), pour une valeur de t aussi petite que l'on voudra la vitesse peut être considérée comme constante.

V. — *De l'accélération.* — En supposant nulle la vitesse initiale dans le mouvement rectiligne uniformément varié, on a

$$s = \frac{bt^2}{2}.$$

En se reportant aux considérations qui précèdent, on reconnaît sans peine que les accélérations se composent et se décomposent comme les vitesses.

§ II. — Des forces.

VI. — *Constitution des corps; divisibilité; molécules, ou points matériels.*

VII. — Premier principe élémentaire de la Mécanique. — *L'état de repos ou de mouvement d'un point matériel ne peut être modifié que par l'intervention d'une cause appelée* force.

C'est donc une force F qui, dans le mouvement rectiligne uniformément varié, produit l'accélération b. On admet que la cause est proportionnelle à l'effet qu'elle produit, et l'on pose, en conséquence,

$$F = mb,$$

m étant un coefficient qui peut varier d'un point matériel à un autre et qui est ce que l'on appelle la *masse* du point matériel considéré. La force se représente par une droite dirigée dans le sens de l'accélération.

VIII. — *Hypothèses sur la constitution du corps.* — Un point matériel peut toujours être considéré comme libre.

IX. — Second principe. — *Plusieurs forces agissant simultanément sur un point matériel produisent chacune le même effet que si les autres n'existaient pas, et cela indépendamment de la vitesse acquise.*

Il est donc permis de supposer que le point matériel est au repos.

Si les forces F, F′, ... constantes en grandeur et en direction donnaient lieu individuellement aux accélérations φ, φ', ... ayant Φ pour résultante, elles produiraient le même effet que la force $R = m\Phi$ qui sera représentée par le dernier côté du polygone formé par des droites égales et parallèles à F, F′, ... placées bout à bout. On reconnaît, d'ailleurs, très facilement, par la théorie des projections, que l'ordre dans le mode de composition est indifférent.

§ III. — Statique des corps solides.

X. — *Hypothèse, comme première approximation, de l'invariabilité de forme d'un solide soumis à l'action de forces extérieures.*

XI. — *Principe expérimental.* — Deux forces égales appliquées en sens inverse en deux points d'un solide, suivant la droite qui joint ces points, se font équilibre, c'est-à-dire qu'elles ne changent en rien l'état de repos ou de mouvement du corps.

XII. — *On peut considérer une force comme étant appliquée en un point quelconque de sa direction pourvu que ce point soit invariablement lié au point d'application primitif de la force.*

Soient A le point d'application de la force F, A′ un point quelconque de la direction de cette force. L'équilibre ne serait pas troublé en appliquant en A′ les forces F′, — F′ égales à F ; mais, d'après le principe précédent, les forces F et — F′ se font équilibre. Il ne reste donc que la force F′ appliquée en A′, ce qu'il fallait établir.

XIII. — *Composition des forces concourantes.* — Si ces forces se rencontrent en un point O du corps, on peut les considérer comme étant appliquées au point matériel correspondant, et la composition s'effectuera d'après la règle n° 9.

Il en est encore de même si le point de concours O se trouve en dehors du corps, à la condition de supposer le point relié invariablement au corps.

XIV. — *Moment d'une force par rapport à un point ; sens et signe du moment ; bras de levier.*

Théorème de Varignon établi par la relation qui existe entre les aires des triangles ayant pour bases deux composantes et leur résultante et pour sommet le centre des moments, situé dans le plan de ces forces ; cas où le centre des moments se trouve sur la direction de la résultante ; extension du théorème à un nombre quelconque de forces concourantes comprises dans un même plan.

XV. — *Composition des forces parallèles et de même sens.* — Soient P et Q deux forces appliquées en A et B, situées dans un même plan, et que l'on peut considérer comme agissant sur le point de concours O de leurs directions, R leur résultante.

Si, en considérant les points A et B comme fixes, on suppose que le point O s'éloigne indéfiniment de A dans la direction de P, la force Q deviendra, à la limite, parallèle à P. La projection de R sur la direction de P sera

$P+Q$, et sera nulle sur la perpendiculaire à cette direction. Il suit de là que *les forces parallèles et de même sens* P *et* Q *ont une résultante qui leur est parallèle et égale à leur somme.*

Soit I l'intersection de la direction de la résultante $R = P + Q$ avec AB, point auquel on peut supposer que cette résultante est appliquée. Les bras de levier de P et de Q par rapport au point I, étant proportionnels à AI et IB, on a, en remarquant que le théorème de Varignon, s'applique, quel que soit l'éloignement de O,

$$P.AI = Q.BI,$$
$$\frac{P}{Q} = \frac{BI}{AI},$$
$$\frac{P+Q}{Q} = \frac{R}{Q} = \frac{AB}{AI};$$

donc, etc.

On déduit de là la décomposition d'une force en deux autres de même sens parallèles à sa direction et comprises avec elle dans un même plan; la composition successive de forces parallèles de même sens situées ou non dans le même plan, enfin le *centre* des forces parallèles.

XVI. — *Composition de deux forces parallèles et de sens contraire.*

Soit, dans l'hypothèse des forces concourantes, $P > Q$, la force P étant censée se trouver dans la direction de OA, et la force Q dans la direction de BO.

En appliquant les mêmes principes que ci-dessus, on trouve

$$R = P - Q,$$
$$P.AI = Q.BI,$$
$$\frac{P-Q}{Q} = \frac{R}{Q} = \frac{AB}{AI};$$

donc, etc.

Si $P = Q$, on a $R = 0$, $AI = \infty$, ce qui n'a pas de sens dans les conditions où je me suis placé. Le système, dans ce cas particulier, constitue un *couple* dont les propriétés seront l'objet d'un examen spécial.

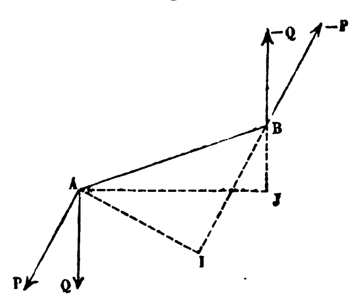
XVII. — *Composition d'un nombre quelconque de forces parallèles de l'un et l'autre sens.*

XVIII. — *Bras de levier et moment d'un couple.*

XIX. — *Composition de deux couples* (P, — P), (Q, — Q) *situés dans un même plan.*

Soient (*fig.* 1) A, B les intersections de P et Q et de — P, — Q; AI, AJ les bras de levier de (P, — P),

Fig. 1.



(Q, — Q); R la résultante des forces P et Q, égale, parallèle et de sens contraire à celle de — P et — Q.

Les forces R, — R constituent un couple dont on désignera par p le bras de levier. En prenant les moments de — R, — P, — Q par rapport à A, on a

$$Rp = P.AI + Q.AJ.$$

Ce qui exprime que le moment du couple résultant est égal à la somme algébrique des moments des couples composants.

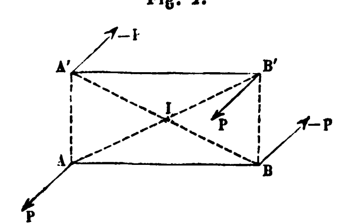
Pour que ces derniers couples se détruisent, il faut que R, — R soient dirigées suivant AB, ou que $p = 0$, ou encore que les moments de (P, — P) et de (Q, — Q) soient égaux et de sens contraire.

Il suit de là que : 1° *un couple* (P, — P) *peut être remplacé dans son plan par un couple* (Q, — Q) *de même moment ;* 2° *un couple peut être déplacé dans son plan.*

XX. — *On peut transporter un couple dans un plan qui lui est parallèle.*

On peut supposer que AB (*fig.* 2) est le bras de levier de (P, — P), qu'un autre couple (— P, P) parallèle et de

Fig. 2.



sens contraire au précédent soit situé de manière que son bras de levier se projette suivant AB.

Les forces P, appliquées en A et B', auront une résultante 2P passant par le milieu I de AB' ; cette résultante sera détruite par celle des deux forces — P. Les deux couples se feront ainsi équilibre ; par suite, le couple (P, — P, A'B') produira le même effet que le couple (P, — P, AB), ce qu'il fallait établir.

XXI. — *Force vive ; travail.*

La *force vive* d'un point matériel de masse m à un instant quelconque est le produit mV^2 de cette masse par le carré de la vitesse.

Le *travail* d'une force constante en grandeur et en di-

rection, correspondant à un intervalle déterminé, est le produit de cette force par le chemin parcouru par son point d'application.

Des formules

$$s = at + \frac{bt^2}{2}, \quad V = a + bt$$

qui s'appliquent à ce dernier cas, on déduit, par l'élimination de t,

$$\frac{V^2 - a^2}{2} = bs$$

ou

$$\frac{mV^2 - ma^2}{2} = mbs = Ps,$$

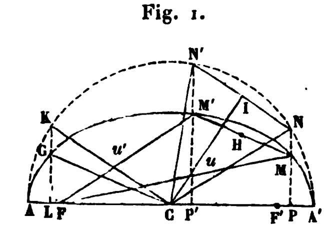
$P = mb$ étant la force qui agit sur le point mobile; donc, etc.

NOTE SUR LE THÉORÈME DE LAMBERT;

PAR M. E. CATALAN.

1. Soit T le temps de la révolution, autour du Soleil F, d'une planète M. Soit t le temps qu'elle emploie à

Fig. 1.



parcourir l'arc MM' de sa trajectoire E. Le *théorème de Lambert*, dont nous allons donner une démonstra-

tion [1], consiste en ce que le rapport $\frac{t}{T}$ dépend seulement des trois quantités suivantes : *le grand axe* $2a$, *la corde* $MM' = c$, *et la somme* s *des rayons vecteurs* FM, FM'.

2. Soient $NCA' = \varphi$, $N'CA' = \varphi'$ les *anomalies excentriques,* relatives aux positions M, M' de la planète. On a, par une formule connue [2],

$$A = \tfrac{1}{2}ab[\varphi' - \varphi + e(\sin\varphi' - \sin\varphi)];$$

ou, si l'on mène CI perpendiculaire à NN', et que l'on fasse

$$(1) \qquad \varphi' - \varphi = 2\,ICN = 2\alpha, \quad \varphi' + \varphi = 2\,ICA' = 2\beta :$$

$$(2) \qquad A = ab(\alpha + e\sin\alpha\cos\beta).$$

La théorie de l'ellipse donne

$$u = a(1 + e\cos\varphi);$$

et, par conséquent,

$$s = a[2 + e(\cos\varphi + \cos\varphi')];$$

ou

$$(3) \qquad s = 2a(1 + e\cos\alpha\cos\beta).$$

3. Dans le trapèze M'P'PM,

$$\overline{MM'}^2 = \overline{PP'}^2 + (P'M' - PM)^2.$$

Or

$$PP' = a(\cos\varphi - \cos\varphi') = 2a\sin\alpha\sin\beta,$$

$$P'M' - PM = \frac{b}{a}(N'P' - NP)$$
$$= b(\sin\varphi' - \sin\varphi) = 2b\sin\alpha\cos\beta;$$

---

[1] Démonstration *classique,* un peu simplifiée.

[2] *Cours d'Analyse de l'Université de Liège,* p. 637.

donc

$$(4)\qquad c^2 = 4\sin^2\alpha(a^2\sin^2\beta + b^2\cos^2\beta),$$

ou

$$(5)\qquad c^2 = 4a^2\sin^2\alpha(1 - e^2\cos^2\beta).$$

4. On déduit, des équations (5) et (3),

$$\frac{c^2}{4a^2} - \left(\frac{s}{2a} - 1\right)^2 = \sin^2\alpha(1 - e^2\cos^2\beta) - e^2\cos^2\alpha\cos^2\beta$$
$$= \sin^2\alpha - e^2\cos^2\beta,$$

ou

$$(6)\qquad \cos^2\alpha + e^2\cos^2\beta = 1 - \frac{c^2}{4a^2} + \left(\frac{s}{2a} - 1\right)^2.$$

De plus, par l'équation (3),

$$(7)\qquad \cos\alpha . e\cos\beta = \frac{s}{2a} - 1 \quad (^1).$$

Conséquemment,

$$(\cos\alpha + e\cos\beta)^2 = \frac{s^2 - c^2}{4a^2},$$
$$(\cos\alpha - e\cos\beta)^2 = \frac{(4a - s)^2 - c^2}{4a^2},$$
$$\cos\alpha + e\cos\beta = \frac{1}{2a}\sqrt{s^2 - c^2},$$
$$\cos\alpha - e\cos\beta = \frac{1}{2a}\sqrt{(4a - s)^2 - c^2}.$$

Pour simplifier la dernière expression, posons

$$(8)\qquad \text{F}'\text{M} = v,\quad \text{F}'\text{M}' = v',\quad v + v' = s'.$$

Il résulte, de cette formule,

$$(9)\qquad s + s' = 4a,$$

(1) Nous adoptons les signes qui répondent à la disposition de la figure.

puis

$$\cos\alpha - e\cos\beta = \frac{1}{2a}\sqrt{s'^2 - c^2}.$$

Les valeurs des inconnues sont donc, finalement,

$$(10)\quad \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{1}{4a}\left(\sqrt{s^2 - c^2} + \sqrt{s'^2 - c^2}\right), \\ e\cos\beta = \dfrac{1}{4a}\left(\sqrt{s^2 - c^2} - \sqrt{s'^2 - c^2}\right). \end{cases}$$

5. Soit $E = \pi ab$ l'aire de l'ellipse. D'après la formule (2),

$$\frac{A}{E} = \frac{1}{\pi}(\alpha + \sin\alpha . e\cos\beta);$$

et, par la deuxième loi de Kepler,

$$(11)\quad \frac{t}{T} = \frac{1}{\pi}(\alpha + \sin\alpha . e\cos\beta).$$

Le théorème de Lambert est démontré; car α et $e\cos\beta$ sont fonctions des seules quantités a, c, s ([1]).

Remarques.

6. Soit, dans le cercle AN'NA', CK perpendiculaire à CI. Soit G le point de l'ellipse, correspondant à K. On a, L étant le pied de l'ordonnée KG :

$$CL = a\sin\beta,\quad LK = a\cos\beta,\quad LG = b\cos\beta;$$

puis

$$CG = \sqrt{a^2\sin^2\beta + b^2\cos^2\beta}\quad ([2]).$$

D'ailleurs, si l'on appelle C la corde NN' :

$$C = 2a\sin\alpha.$$

([1]) Formules (9) et (10)

([2]) Expression connue.

La relation (4) peut donc être écrite ainsi :

$$\frac{c}{C} = \frac{CG}{CK}.$$

Pour une autre ellipse, ayant même grand axe que la première, on aurait

$$\frac{c'}{C} = \frac{CG'}{CK};$$

puis

$$\frac{c}{c'} = \frac{CG}{CG'}.$$

Et comme CG, *conjugué du diamètre passant au milieu de* MM′, est parallèle à MM′, nous pouvons énoncer ce petit théorème, presque évident :

Si l'on considère, dans deux ellipses ayant un axe commun, deux cordes comprises entre mêmes ordonnées, ces cordes sont entre elles comme les diamètres qui leur sont respectivement parallèles.

7. Sur la perpendiculaire au milieu H de MM′, prenons les points D, D′, de manière que

$$M'D = MD = \frac{s}{2}, \quad M'D' = MD' = \frac{s'}{2}.$$

Fig. 2.

A cause de

$$M'D + MD = s = u + u',$$

le point D *appartient à une ellipse passant en* F, *et dont les foyers sont* M, M'.

Inversement, pour ainsi dire, D, D' *sont les foyers d'une ellipse* E', *passant en* M, M'. Cherchons les éléments de cette courbe.

En premier lieu, le grand axe

$$EE' = M'D + M'D' = \tfrac{1}{2}(s + s') = 2a.$$

Ainsi, *les grands axes des ellipses* E, E' *sont égaux entre eux.*

D'autre part, O étant le centre de E' :

$$OD = \tfrac{1}{2}(HD - HD') = \tfrac{1}{4}(\sqrt{s^2 - c^2} - \sqrt{s'^2 - c^2});$$

ou, par la formule (10):

$$(12) \qquad OD = ae\cos\beta = ae',$$

e' étant l'excentricité de E'.

De cette relation (12), on conclut

$$DD' = FF'\cos\beta :$$

la distance des foyers D, D' *égale la projection, sur* CI (*fig.* 1), *de* FF'.

8. Ce n'est pas tout :

$$OH = \tfrac{1}{2}(HD + HD') = \tfrac{1}{4}(\sqrt{s^2 - c^2} + \sqrt{s' - c^2});$$

ou, par la première des formules (10),

$$OH = a\cos\beta = CI.$$

9. Prenons, sur MM' (*fig.* 2), de part et d'autre du point H,

$$Hm' = Hm = IN' = IN,$$

et tirons Om', Om. Les triangles isoscèles $m'mO$, N'NC sont égaux, comme ayant même base et même hauteur.

Dès lors, l'angle m'OH (*fig.* 2), anomalie excentrique de M', relativement au foyer D, égale α [1]

$$\frac{s}{2} = a(1 + e\cos\alpha\cos\beta) = a(1 + e'\cos\alpha).$$

10. Imaginons l'ellipse E', transportée parallèlement à elle-même, de manière que son foyer D coïncide avec le foyer F (*fig.* 1). Soit $M_1M'_1$ la nouvelle position [2] de l'arc MM'. Soit T_1 le temps de la révolution. D'après la troisième loi de Kepler, $T_1 = T$.

Conséquemment,

$$\frac{t_1}{T} = \frac{A_1}{E'};$$

puis

$$\frac{t_1}{t} = \frac{A_1}{A}\frac{E}{E'},$$

A_1 étant l'aire du secteur elliptique $M_1FM'_1$.

Or, par la formule (2), dans laquelle $e\cos\beta = e'$,

$$A = ab(\alpha + e'\cos\alpha),$$
$$A_1 = ab'(\alpha + e'\cos\alpha);$$

donc

$$\frac{A}{A_1} = \frac{b}{b'} = \frac{E}{E'};$$

puis

$$t_1 = t.$$

Ainsi *deux planètes, sollicitées par le Soleil* F, *décriraient, dans des temps égaux, les arcs inégaux* MM', $M_1M'_1$ [3], *appartenant aux ellipses* E, E_1.

11. Le lieu du centre *virtuel* O_1 est la circonférence décrite sur FC comme diamètre. Conséquemment, le

---

(1) Cette propriété résulte aussi de la formule (3).

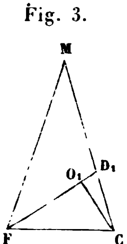
(2) Non représentée sur la figure.

(3) Ces arcs ont des cordes égales.

lieu du sommet E'_1 est une *conchoïde* de cette circonférence.

Soit D_1 le second foyer de l'ellipse E_1. Soit M le point

Fig. 3.



de cette courbe situé sur le prolongement de CD_1. On a

$$FM + MD_1 = 2a;$$

et, comme le triangle FCD_1 est isoscèle :

$$FM + MC = 2a + k.$$

D'après cette égalité, le point M de l'ellipse variable, appartient à une ellipse fixe, ayant F, C pour foyers, et dont le grand axe égale $2a + k$. Ces deux courbes se touchent en M; donc *l'enveloppe des ellipses variables est l'ellipse fixe*.

SUR UNE COMMUNICATION DE M. TCHÉBYCHEW AU CONGRÈS DE CLERMONT-FERRAND (1);

PAR M. E. CESARO.

I. Ayant posé, pour abréger,

$$w_x = u_{k(x-1)+1} + u_{k(x-1)+2} + u_{k(x-1)+3} + \ldots + u_{k(x-1)+k-1},$$

(1) 21 août 1876.

considérons la série

$$U_{kn} = w_1 - (k-1)u_k + w_2 - (k-1)u_{2k} + \ldots + w_n - (k-1)u_{nk},$$

supposée convergente. On peut écrire

$$U_{kn} = (u_1 + u_2 + \ldots + u_{kn}) - k(u_k + u_{2k} + \ldots + u_{nk});$$

par conséquent, si l'on fait

$$v_x = ku_{kx} - u_x,$$

puis

$$V_x = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_x,$$

on a

$$U_{kn} + V_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{kn}.$$

Si n augmente indéfiniment,

$$U + V = \lim[u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{kn}].$$

II. $[z]$ désignant le plus grand nombre entier contenu dans z, soit

$$u_x = \frac{[ax]}{x^2}$$

et, par suite,

$$v_x = \frac{[kax] - k[ax]}{kx^2}.$$

A cause de

$$kax - 1 < [kax] \overline{\gtrless} kax, \quad kax - k < k[ax] \overline{\gtrless} kax,$$

on a

$$-1 < [kax] - k[ax] < k.$$

La quantité $[kax] - k[ax]$ a donc une des valeurs $0, 1, 2, 3, \ldots, k-1$. Il en résulte qu'elle est égale au reste de la division de $[kax]$ par k. Par conséquent, $\rho(p, q)$ désignant le reste de la division de $[p]$ par q, on a

$$v_x = \frac{\rho(kax, k)}{kx^2}.$$

Cela posé, on peut écrire

$$u_x = \frac{a}{x} - \frac{\theta}{x^2},$$

θ étant une fraction proprement dite. Il en résulte

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{kn}$$
$$= a(\mathrm{H}_{kn} - \mathrm{H}_n) - \Theta\left[\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(kn)^2}\right],$$

Θ étant, comme θ, une fraction proprement dite, et H_x représentant la somme des x premiers termes de la série harmonique. Pour n infini :

$$\lim[u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{kn}] = alk.$$

De tout cela résulte que, si l'on pose

$$\mathrm{U} = \frac{[a]}{1} + \frac{[2a]}{4} + \ldots - (k-1)\frac{[ka]}{k^2} + \frac{[(k+1)a]}{(k+1)^2} + \frac{[(k+2)a]}{(k+2)^2} + \ldots,$$
$$\mathrm{V} = \frac{1}{k}\left[\frac{\rho(ka,k)}{1} + \frac{\rho(2ka,k)}{4} + \frac{\rho(3ka,k)}{9} + \ldots\right],$$

on a

$$\mathrm{U} + \mathrm{V} = alk.$$

III. Soit, par exemple, $k = 2$. La fonction $\rho(z,2)$ égale 0 ou 1, suivant que $[z]$ est pair ou impair. On peut donc écrire

$$\rho(z,2) = \frac{1 - (-1)^{[z]}}{2}$$

Conséquemment, si l'on pose

$$\mathrm{U} = \frac{[a]}{1} - \frac{[2a]}{4} + \frac{[3a]}{9} - \frac{[4a]}{16} + \ldots,$$
$$\mathrm{W} = \frac{(-1)^{[2a]}}{1} + \frac{(-1)^{[4a]}}{4} + \frac{(-1)^{[6a]}}{9} + \ldots,$$

on a

$$\mathrm{U} - \frac{1}{4}\mathrm{W} = al2 - \frac{\pi^2}{24}.$$

C'est [1] la relation que M. Tchébychew a déduite d'une identité de M. Catalan [2]. Elle montre, par exemple, que l'équation

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} \pm \frac{[ix]}{i^2} = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{(-1)^{[2ix]}}{i^2}$$

admet la racine unique

$$x = \frac{\pi^2}{24\,l\,2} = 0{,}59308\ldots.$$

ÉTUDE DE DEUX SYSTÈMES SIMPLES DE COORDONNÉES TANGENTIELLES DANS LE PLAN : COORDONNÉES PARALLÈLES ET COORDONNÉES AXIALES

(voir p. 456);

PAR M. MAURICE D'OCAGNE,
Élève-Ingénieur des Ponts et Chaussées.

31. *Équation réduite.* — Prenons la forme réduite de l'équation des coniques

$$uv = K.$$

Nous avons vu qu'elle représente une conique touchant les axes de coordonnées aux origines.

Cherchons les tangentes parallèles à l'axe des origines, en faisant $u = v$; cela donne

$$u = v = \pm\sqrt{K}.$$

Si donc $K > 0$, on a une ellipse.

Si $K < 0$, une hyperbole.

(1) Sauf une légère inadvertance.

(2) *Nouvelle Correspondance mathematique,* t. II, p. 106.

En effet, dans ce cas (n° 25),

$$r\Delta = -\frac{K}{4}.$$

K est le carré du demi-diamètre b conjugué de l'axe des origines, ou, ce qui revient au même, du demi-diamètre parallèle aux axes de coordonnées.

L'équation réduite des coniques exprime, par suite, la propriété suivante :

Dans une conique, le produit des segments déterminés par une tangente quelconque sur deux tangentes parallèles entre elles (à partir de leurs points de contact) est constant et égal au carré du demi-diamètre parallèle à ces deux tangentes.

32. Le centre est déterminé (n° 26) par

$$u + v = 0,$$

milieu de la distance des origines, et les asymptotes par l'équation précédente jointe à celle de la courbe

$$uv = b^2,$$

d'où l'on tire, pour ces asymptotes,

$$u = bi, \quad v = -bi$$

et

$$u = -bi, \quad v = bi.$$

33. La relation qui lie deux directions conjuguées (n° 27) est dans ce cas

$$\frac{kk_1}{4} + b^2 = 0 \quad \text{ou} \quad kk_1 = -4b^2.$$

Ce résultat peut s'interpréter géométriquement sans difficulté et conduit à un théorème connu.

34. Par le point dont l'équation est

$$u = mv + n,$$

menons les deux tangentes à la conique. Les v de ces tangentes seront donnés par l'équation

$$mv^2 + nv - b^2 = 0.$$

Pour que ces tangentes soient confondues, il faut que

$$n^2 + 4mb^2 = 0.$$

Telle est donc la relation qui doit être remplie pour que le point soit sur la courbe. L'équation de tout point de la conique sera donc de la forme

$$u = mv \pm 2b\sqrt{-m},$$

et l'on sait que m est le rapport des distances à A et à B du pied de la parallèle aux axes de coordonnées, menée par le point considéré.

L'équation en v écrite plus haut montre que, si m est constant et n variable, le produit des racines est constant; or, m étant constant, on voit que le point se meut sur une parallèle aux axes de coordonnées. De là ce théorème :

C *étant une conique,* D *une droite quelconque, on mène à* C *une tangente* Δ *parallèle à* D, *et dont le point de contact est* A. *Les tangentes à* C, *issues d'un point quelconque de* D, *déterminent sur* Δ, *à partir de* A, *deux segments dont le produit est constant.*

Détermination des foyers.

35. Nous avons vu (n° 3) que l'angle d'une droite avec l'axe des origines est donné par

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{(v-u)\sin\theta}{d+(v-u)\cos\theta};$$

il s'ensuit, en posant $\tang\alpha = m$,

$$(a) \qquad v = u + \frac{md}{\sin\theta - m\cos\theta}.$$

Soient alors donnés un point

$$(b) \qquad u + pv + q = 0,$$

et une conique

$$(c) \qquad Au^2 + 2Buv + Cv^2 + 2Du + 2Ev + F = 0.$$

On aura les m des tangentes menées de ce point à cette conique, en éliminant u et v entre les équations (a), (b), (c), ce qui n'offre pas de difficulté. On trouve ainsi

$$Pm^2 + Qm + R = 0,$$

P, Q, R étant des polynômes du second degré en p et q.

Si le point représenté par l'équation (b) est un foyer, les m des tangentes issues de ce point ont pour valeurs $\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$; par suite, l'équation précédente doit être identique à

$$m^2 + 1 = 0,$$

ce qui exige que

$$Q = 0 \quad \text{et} \quad P = R.$$

On a ainsi deux équations du second degré en p et q qui font connaître les valeurs de ces paramètres, relatives aux foyers de la conique.

V. — Exemples d'application des coordonnées parallèles.

36. *Une conique variable est constamment tangente à deux droites parallèles fixes et touche une conique fixe toujours au même point, trouver le lieu du point*

de rencontre des tangentes communes à ces deux coniques.

Prenons pour origines A le point de contact fixe des deux coniques, et pour axe AB la tangente en ce point, pour axe Au la droite menée par ce point parallèlement aux droites fixes données, et pour axe Bv une parallèle quelconque à cette droite.

Équation de la conique fixe

$$(\alpha) \qquad \mathrm{A}u^2 + 2\mathrm{B}uv + \mathrm{C}v^2 + 2\mathrm{D}u = 0;$$

équation de la conique variable

$$(\beta) \qquad \mathrm{A}'u^2 + 2\mathrm{B}'uv + \mathrm{C}'v^2 + 2\mathrm{D}'u = 0,$$

où A′, B′, C′ sont constants, d'après le corollaire qui termine le n° **21**, puisque la conique variable a toujours les mêmes tangentes parallèles aux axes.

Multiplions (α) par C′, (β) par C et retranchons, il vient

$$u[(\mathrm{AC}' - \mathrm{A}'\mathrm{C})u + 2(\mathrm{BC}' - \mathrm{B}'\mathrm{C})v + 2(\mathrm{DC}' - \mathrm{D}'\mathrm{C})] = 0,$$

équation qui donne les pôles communs aux deux coniques.

$u = 0$ est leur point de contact fixe.

$$(\mathrm{AC}' - \mathrm{A}'\mathrm{C})u + 2(\mathrm{BC}' - \mathrm{B}'\mathrm{C})v + 2(\mathrm{DC}' - \mathrm{D}'\mathrm{C}) = 0$$

est le point dont on cherche le lieu; or le rapport des distances de ce point aux axes de coordonnées, égal à $-\frac{2(\mathrm{BC}' - \mathrm{B}'\mathrm{C})}{\mathrm{AC}' - \mathrm{A}'\mathrm{C}}$, étant indépendant du paramètre variable qui est D′, ce point reste sur une droite parallèle aux axes de coordonnées : tel est donc le lieu cherché.

37. Nous allons montrer maintenant comment les coordonnées tangentielles permettent de déduire corrélativement des théorèmes nouveaux de ceux qui sont

établis au moyen des coordonnées cartésiennes ([1]); deux questions seront corrélatives lorsqu'elles reposeront sur les mêmes équations en x et y d'une part, en u et v de l'autre, et que ces équations seront soumises aux mêmes opérations; seules les interprétations géométriques différeront. En voici des exemples :

En coordonnées cartésiennes, on a :

Si une droite se déplace en restant parallèle à elle-même, elle coupe constamment une courbe fixe du $m^{ième}$ ordre en m points dont le centre des moyennes distances décrit une droite.

Or, à des droites parallèles, en coordonnées cartésiennes, correspondent, en coordonnées parallèles, des points situés sur une parallèle aux axes de coordonnées; au centre des moyennes distances, correspond la droite moyenne relative à la direction des axes de coordonnées; comme ces axes sont d'ailleurs quelconques, nous aurons, en coordonnées parallèles, le théorème suivant :

Si un point décrit une droite D, *la droite moyenne, relative à la direction de* D, *des m tangentes que l'on peut mener de ce point à une courbe fixe de la $m^{ième}$ classe, passe par un point fixe.*

En coordonnées cartésiennes, on a encore ce théorème :

Le centre des moyennes distances des $m(m-1)$ points de contact des tangentes à une courbe fixe d'ordre m, parallèles à une direction donnée, est fixe lorsqu'on fait varier la direction des tangentes.

([1]) Nous reviendrons sur ce sujet dans les paragraphes IX et X.

Par transformation corrélative nous aurons, en coordonnées parallèles, le théorème suivant :

Une droite D *se déplaçant parallèlement à elle-même coupe constamment une courbe fixe de la classe* m *en* $m(m-1)$ *points; la droite moyenne, relative à la direction de* D, *des tangentes en tous ces points, est fixe.* (*A suivre.*)

SUR LES DIVERSES COURBURES DES LIGNES QU'ON PEUT TRACER SUR UNE SURFACE;

PAR LE R. P. ISSOLY, à Uclès (Espagne).

I.

1° Étant donnés sur une surface F un point M et une courbe quelconque S issue de ce point, on sait que les tangentes consécutives MT et M′T′ aux points infiniment voisins M et M′ de la courbe forment un angle dont le rapport à l'arc MM′ ou ds mesure la première courbure $\frac{1}{r}$ de la ligne S au point M.

Les composantes orthogonales, tangentielle et normale, $\frac{1}{r'}$ et $\frac{1}{r''}$ de cette courbure, c'est-à-dire les projections de $\frac{1}{r}$ sur le plan tangent en M et le plan normal à la surface conduit suivant ds, donnent la relation

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{r'^2} + \frac{1}{r''^2}.$$

2° Considérons les tangentes MH, M′H′ menées en M et M′ aux trajectoires orthogonales de la ligne S, situées comme elle sur la surface F; le rapport de leur angle à

l'arc *ds* mesure une nouvelle courbure que l'on peut désigner du nom de *déviation tangentielle* ou *horizontale* de la ligne S au point M. Or il est facile de prouver que cette déviation est la résultante de deux composantes orthogonales, savoir : 1° la torsion géodésique; 2° la première courbure géodésique de cette dernière ligne, de telle sorte qu'on peut écrire

$$(2) \qquad \frac{1}{u^2} = \frac{1}{g^2} + \frac{1}{r'^2}.$$

3° Substituons aux deux tangentes MH et M'H' les deux normales MN et M'N' à la surface; on formera avec elles la courbure que M. Bertrand a analysée le premier avec tant de succès, courbure encore innommée, croyons-nous, et que l'analogie des propriétés nous mène à qualifier de *déviation normale* ou *verticale* des lignes Σ. Elle admet en effet, elle aussi, des composantes orthogonales qui sont la torsion et la courbure normale Σ, d'où l'on conclut la formule

$$(3) \qquad \frac{1}{v^2} = \frac{1}{g^2} + \frac{1}{r''^2}.$$

4° En projetant la déviation normale sur deux directions rectangulaires quelconques ML_1 et ML_2 situées dans le plan tangent, on obtiendra les *composantes générales* de cette courbure. Ces composantes jouissent de propriétés nombreuses et variées qui, dans deux cas particuliers, les rattachent aux lignes asymptotiques et aux lignes de courbure de la surface. Pour ne citer qu'une de leurs propriétés générales, je dirai qu'elles ne sont autres, à un facteur constant près, que les inverses de la distance au plan tangent des traces que produit la normale M'N' sur les plans normaux NML_1 et NML_2.

5° Pour simplifier le langage, convenons de dési-

gner, comme en Géométrie descriptive, par *plan de front* et *plan de profil* les plans normaux NMT et NMH menés respectivement par la tangente à la ligne S et à sa trajectoire orthogonale. Appelons aussi *plan de la déviation horizontale* le plan-limite de la variation du rayon de courbure géodésique $\frac{1}{r'}$; et *plan de la déviation normale* le plan-limite de la variation du rayon de courbure normale $\frac{1}{r''}$; nous pourrons énoncer le théorème général suivant :

Théorème. — *En tout point d'une courbe quelconque tracée sur une surface : 1° le plan tangent à la surface et le plan osculateur de la courbe; 2° le plan de front et le plan de la déviation horizontale; 3° le plan de profil et le plan de la déviation verticale forment entre eux trois angles tels que si, dans chaque couple, on prend l'angle aigu correspondant, le produit de leurs tangentes trigonométriques est toujours égal à l'unité.*

Telle est la généralité de cette propriété que les lignes géodésiques, les lignes asymptotiques et les lignes de courbure caractérisées respectivement par les conditions $\frac{1}{r'} = 0$, $\frac{1}{r''} = 0$, $\frac{1}{g} = 0$, ne la font tomber en défaut que d'une manière apparente.

6° La considération des déviations tangentielle et normale $\frac{1}{u}$ et $\frac{1}{v}$ fournit la démonstration la plus simple et la plus naturelle du célèbre théorème de Dupin sur les surfaces orthogonales.

7° La déviation tangentielle fournit une quatrième équation élémentaire fondamentale s'ajoutant aux trois déjà connues (voir *Calcul différentiel* de M. Serret,

2[e] édition, p. 489), et l'on a le système complet

$$(1)\qquad d\tau - d\varphi + \sin\omega\, d\varepsilon = 0,$$

$$(2)\qquad d\eta - d\omega + \sin\varphi\, d\sigma = 0,$$

$$(3)\qquad \cos\omega\, d\varepsilon + \cos\varphi\, d\sigma = 0,$$

$$(4)\qquad \sin\psi\, d\upsilon - \sin\varphi\, d\sigma = 0.$$

Dans ces formules, qui supposent essentiellement que le trièdre trirectangle NMTH a ses arêtes disposées dans le sens direct, et qu'on a choisi pour ψ et ω les angles aigus que les rayons des déviations tangentielle et normale font respectivement avec la normale MN et la tangente MT, les différentielles $d\sigma$, $d\upsilon$, $d\varepsilon$ et $d\eta$ représentent les angles de contingence de la première courbure, de la déviation tangentielle, de la déviation normale et de la courbure conjuguée de la ligne S, enfin φ représente l'angle de son plan osculateur avec la normale.

Comme la première de ces formules peut être remplacée par celle-ci :

$$(1')\qquad d\tau - d\varphi - \cos\psi\, d\upsilon = 0;$$

on en conclut la relation très simple

$$\operatorname{tang}\varphi = \operatorname{tang}\psi \operatorname{tang}\omega,$$

qui, légèrement transformée, fournit le théorème ci-dessus énoncé.

II.

1° Revenons aux deux normales infiniment voisines MN et M'N'; on sait que si l'on donne à l'arc ds toutes les directions possibles autour du point M, et que, par l'extrémité libre de cet arc, on mène les normales correspondantes de la surface, la perpendiculaire commune à ces normales produit une surface conoïdale qui, rapportée au plan tangent en M et aux plans des sections

principales, a pour équation

$$(1) \qquad z = \frac{R''_2 x^2 + R''_1 y^2}{x^2 + y^2},$$

R''_1 et R''_2 représentant les longueurs des rayons principaux au point M.

2° D'autre part, le lieu géométrique des extrémités des rayons de courbure de toutes les sections *normales ou obliques* que l'on peut faire à la surface F tout autour du point M a pour équation, dans le même système d'axes coordonnés,

$$(2) \qquad x^2 + y^2 + z^2 - \frac{R''_1 R''_2 (x^2 + y^2) z}{R''_2 x^2 + R''_1 y^2} = 0;$$

et l'on vérifie aisément que, conformément au théorème de Meunier, les sections normales faites dans cette surface *osculatrice* sont bien des cercles.

3° Les surfaces (1) et (2) se coupent suivant une ligne gauche qui appartient à la sphère

$$(3) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = R''_1 R''_2,$$

et dont la projection sur le plan tangent a pour équation, en coordonnées polaires,

$$(4) \qquad \rho^2 = (R''_2 - R''_1)(R''_2 \cos^4\theta' - R''_1 \sin^4\theta').$$

4° Considérons les deux plans normaux rectangulaires NML_1 et NML_2 dont il a été question plus haut; soient K_1 et K_2 les points où ils sont rencontrés par la normale M'N'; menons par ces points, et dans chacun de ces plans, des parallèles I_1K_1, I_2K_2 au plan tangent, s'appuyant, en conséquence, sur la normale MN. Soit enfin i l'angle que le premier de ces plans fait avec le plan normal NMT; si l'on fait tourner les trois plans de telle manière que l'angle i reste constant, les parallèles

tracées décriront deux surfaces conoïdales analogues à la précédente.

La première ayant pour équation

$$(5)\qquad \frac{x^2+y^2}{z} = \left(\frac{x^2}{R''_2} + \frac{y^2}{R''_1}\right) - xy\left(\frac{1}{R''_2} - \frac{1}{R''_1}\right)\cot i,$$

la seconde s'en déduira par le changement de i en $i - \frac{\pi}{2}$.

Que si l'on suppose maintenant i variable et suivant la loi

$$\tang i = -\frac{r''}{g},$$

on retombera sur le conoïde (1) de la perpendiculaire commune aux normales infiniment voisines de MN.

5° Comme l'a remarqué M. Bertrand, le lieu des projections du point K, extrémité de la plus courte distance IK des normales MN et M'N', quand la seconde tourne autour de la première, est

$$(6)\qquad d\lambda = \frac{(R''_1 - R''_2)\sin\theta''\cos\theta''}{\sqrt{R''^2_1\sin^2\theta'' + R''_1\cos^2\theta''}}\,ds.$$

Par analogie, le lieu des projections du point K_1, extrémité de la parallèle I_1K_1 au plan tangent menée dans le plan NML_1, a pour équation

$$(7)\qquad d\lambda_1 = \frac{(R''_1 - R''_2)\sin(\theta_1 - i)\cos(\theta_1 - i)}{R''_1\cos\theta_1\sin(\theta_1 - i) - R''_2\sin\theta_1\cos(\theta_1 - i)}\,ds.$$

On en déduira le lieu des projections du point K_2, extrémité de la parallèle I_2K_2, en remplaçant i par $i - \frac{\pi}{2}$.

Enfin, de l'une ou de l'autre de ces courbes on peut tirer, comme cas particulier, la courbe (6); il suffit, pour cela, de se rappeler que, sur le plan tangent, la projection de IK est la direction conjuguée de MT relativement à l'indicatrice de la surface F au point M.

CORRESPONDANCE.

Lettre de M. Maurice d'Ocagne.

La question 1494, proposée par M. Genty, est un cas particulier [1] du théorème suivant :

Si le point de concours H *des diagonales d'un quadrilatère* ABCD, *inscrit dans une conique, est fixe, et si le côté* AB *tourne autour d'un point fixe* P, *le côte opposé* CD *tourne autour d'un point fixe de la droite* PH.

Voici comment je démontre ce théorème :

Prenons pour origine des coordonnées le point H, pour axe des y la droite HP, et posons $HP = d$.

Soit

$$S \doteq Ax^2 + Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

l'équation de la conique donnée,

Équation de AC......... $\Delta = y - \mu x = 0,$

» BD......... $\Delta' = y - \mu' x = 0,$

Équation de AB......... $\Gamma = y - d - \nu x = 0,$

» CD......... $\Gamma' = y - \delta - \nu' x = 0,$

μ, μ', δ, ν et ν' sont cinq paramètres variables liés au paramètre variable λ par les cinq équations qui proviennent de l'identification des équations

$$S = 0 \quad \text{et} \quad \Delta\Delta' + \lambda\Gamma\Gamma' = 0.$$

---

[1] Quand les points P et H sont rejetés à l'infini.

Ces équations sont

$$\frac{\mu\mu'+\lambda\nu\nu'}{A} = \frac{-(\mu+\mu'+\lambda(\nu+\nu')}{B} = \frac{1+\lambda}{C}$$
$$= \frac{\lambda(\delta\nu+d\nu')}{2D} = \frac{-\lambda(d+\delta)}{2E} = \frac{\lambda d\delta}{F}.$$

De la dernière on tire

$$\delta = \frac{-Fd}{2Ed+F};$$

donc δ est constant, ce qui montre que CD coupe l'axe des y, c'est-à-dire PH, en un point fixe; et le théorème est démontré. D'ailleurs, en écrivant la relation précédente

$$\frac{1}{\delta}+\frac{1}{d} = -\frac{2E}{F},$$

on voit immédiatement, en appelant Q le point fixe de PH par où passe CD, I et J les points où PH coupe la conique donnée, que le point H a même conjuguée harmonique par rapport aux deux couples de points (I, J) et (P, Q), ce qui détermine géométriquement le point Q.

En transformant par polaires réciproques, on a ce théorème :

Si un quadrilatère ABCD, *circonscrit à une conique, a une diagonale* BD *fixe et si le sommet* A *décrit une droite* Δ, *le sommet opposé* C *décrit une droite* Δ' *coupant* BD *au même point que* Δ.

La droite BD *a même conjuguée harmonique, par rapport aux droites* Δ, Δ' *et par rapport aux tangentes à la conique donnée issues du point de concours de* Δ *et* Δ'.

Extrait d'une Lettre de M. H. Plamenevsky, maître à l'École Reale Temir Chan-Choura (Caucase), sur la question **1488**, de *décomposer en deux facteurs du second degré le premier membre de l'équation*

$$(1)\qquad x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0,$$

où l'on suppose $A\sqrt{D} = C$.

On peut considérer les racines de cette équation comme les abscisses des points d'intersection de deux coniques représentées par les équations

$$(2)\qquad x^2 - y^2 = r^2,$$

et

$$(3)\qquad x^2 = ax + by + c.$$

L'élimination de y entre les équations (2) et (3) donne

$$(4)\quad x^4 - 2ax^3 + (a^2 - b^2 - 2c)x^2 + 2acx + c^2 + b^2r^2 = 0.$$

En égalant les coefficients des mêmes puissances de x dans les équations (4) et (1), on trouve

$$a = -\frac{A}{2},\ c = -\frac{C}{A},\ b = \sqrt{\frac{A^2}{4} - B + \frac{2C}{A}},\ r^2 = \frac{D - \dfrac{C^2}{A^2}}{\dfrac{A^2}{4} - B + \dfrac{2C}{A}}.$$

Mais, par hypothèse, $A\sqrt{D} = C$; il en résulte

$$D - \frac{C^2}{A^2} = 0,$$

et par suite

$$r^2 = 0,\quad x^2 - y^2 = 0,\quad y = \pm x.$$

En remplaçant, dans l'équation (3), a, b, y, c par

ces expressions, il vient

$$x^2 = -\frac{A}{2}x \pm x\sqrt{\frac{A^2}{4} - B + \frac{2C}{A}} - \frac{C}{A}$$

ou

$$x^2 = \left(-\frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} - B + \frac{2C}{A}}\right)x - \frac{C}{A}.$$

Ces valeurs de x, vérifiant l'équation (4), vérifient de même l'équation proposée (1) : donc on a identiquement

$$\begin{aligned} x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = & \left[x^2 + x\left(\frac{A}{2} + \sqrt{\frac{A^2}{4} - B + \frac{2C}{A}}\right) + \frac{C}{A}\right] \\ & \times \left[x^2 + x\left(\frac{A}{2} - \sqrt{\frac{A^2}{4} - B + \frac{2C}{A}}\right) + \frac{C}{A}\right]. \end{aligned}$$

On voit que, dans le cas particulier où $A\sqrt{D} = C$, les racines de l'équation

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

sont les abscisses des points d'intersection d'une parabole et de deux droites représentées par les équations $x + y = 0$, $x - y = 0$.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 487

(voir 1re série, t. XVIII, p. 357);

PAR M. H. BROCARD.

Dans tout tétraèdre : 1° Les quatre hauteurs donnent lieu, prises deux à deux, à six plus courtes distances parallèles aux six arêtes du tétraèdre; 2° ces six plus

courtes distances donnent lieu, prises deux à deux, à quinze plus courtes distances dont douze sont nulles, et dont les trois autres sont parallèles aux trois plus courtes distances des arêtes opposées du tétraèdre.

1° Désignons par A, B, C, D les plans des faces opposées aux sommets a, b, c, d du tétraèdre; par $\delta(a, b)$ la plus courte distance des hauteurs aH, bH partant des sommets a et b.

Par définition, $\delta(a, b)$ est parallèle à une droite située dans le plan perpendiculaire à chacune des hauteurs aH, bH. Donc $\delta(a, b)$ *est parallèle* à l'arête d'intersection des plans A, B, c'est-à-dire *à l'arête cd du tétraèdre*.

Il y a quatre hauteurs, c'est-à-dire $\frac{4.3}{1.2} = 6$ plus courtes distances parallèles à chacune des arêtes du tétraèdre.

2° Les six plus courtes distances, prises deux à deux, donnent $\frac{6.5}{1.2} = 15$ plus courtes distances.

La plus courte distance entre $\delta(a, b)$ et $\delta(c, d)$, par exemple, est perpendiculaire à chacune de ces droites; mais ces droites sont parallèles aux arêtes ab, cd du tétraèdre; donc la plus courte distance en question est parallèle à la plus courte distance de ces arêtes opposées. Or, il y a trois couples d'arêtes opposées (ab, cd; ac, bd; ad, bc). Il y a donc trois plus courtes distances parallèles aux plus courtes distances de ces arêtes.

Reste à démontrer que les douze autres sont nulles. $\delta(a, b)$, par exemple, est parallèle à cd; $\delta(a, c)$ est parallèle à bd; donc la plus courte distance entre $\delta(a, b)$ et $\delta(a, c)$ est parallèle à la plus courte distance entre cd et bd. Mais ces droites se rencontrent. Ainsi la plus courte distance entre ces droites est *nulle* et n'a *pas de*

direction déterminée. De cette indétermination résulte que la plus courte distance en question est nulle.

Question 1437

(voir 3e série, t. II, p. 192);

PAR M. MORET-BLANC.

u_n désignant le $n^{ième}$ terme de la série de Lamé, on a

$$(2u+1)^n - u^{3n} = 0,$$

pourvu que l'on remplace les exposants par des indices. (E. CESARO.)

Soit la série de Lamé

1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987,...

dont chaque terme, à partir du troisième, est égal à la somme des deux qui le précèdent. On a, d'après la loi de formation,

$$u_{3(n+1)} = u_{3n+2} + u_{3n+1} = u_{3n+1} + u_{3n} + u_{3n+1},$$

d'où

$$u_{3(n+1)} = 2u_{3n+1} + u_{3n},$$

ou symboliquement

$$u^{3(n+1)} = u^{3n}(2u+1),$$

les exposants de u devant être remplacés par des indices. Or

$$u^3 = (2u+1);$$

donc

$$u^6 = (2u+1)^2,$$
$$u^9 = (2u+1)^3,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$u^{3n} = (2u+1)^n,$$

ou

$$(2u+1)^n - u^{3n} = 0, \text{ symboliquement.}$$

Note. — La même question a été résolue par M. A. Droz.

Question 1454

(voir 3e série, t. II, p. 336);

PAR M. H. FAURE.

On donne une sphère et un point dans son intérieur; de ce point on mène trois cordes, telles que le pôle du plan de deux quelconques d'entre elles soit sur la troisième : la somme des inverses des carrés de ces cordes est constante. (MANNHEIM.)

A la page 13 du tome XVI des *Nouvelles Annales*, 2e série, j'ai démontré le théorème suivant :

La somme des inverses des indices des arêtes d'un trièdre conjugué à une surface du second ordre est égale au carré de la distance du centre de la surface au sommet du trièdre, diminué de la somme des carrés des demi-axes de la surface, et divisé par l'indice du sommet du trièdre, pris en signe contraire.

Si l'on suppose que la surface du second degré est une sphère, on a le théorème de M. Mannheim.

Si l'on désigne, en effet, par λ, μ, ν les arêtes du trièdre, par S^2 la somme des carrés des demi-axes de la surface, par o son centre, par a le sommet du trièdre, notre théorème donne

$$\frac{1}{I_\lambda}+\frac{1}{I_\mu}+\frac{1}{I_\nu}=\frac{S^2-\overline{oa}^2}{I_a}.$$

Si donc λ, μ, ν sont les longueurs des cordes déterminées dans la surface par les droites λ, μ, ν; et λ_1, μ_1, ν_1 les demi-diamètres parallèles à ces cordes,

$$I_\lambda=-\frac{\lambda^2}{4\lambda_1^4},\quad I_\mu=-\frac{\mu^2}{4\mu_1^4},\quad I_\nu=-\frac{\nu^2}{4\nu_1^4};$$

on a donc la relation

$$\frac{\lambda_1^4}{\lambda^2} + \frac{\mu_1^4}{\mu^2} + \frac{\nu_1^4}{\nu^2} = \frac{\overline{oa}^2 - S^2}{4 I_a}.$$

Maintenant, si la surface devient une sphère de rayon R,

$$I_a = \frac{oa^2 - R^2}{R^2},$$

par conséquent

$$\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\mu^2} + \frac{1}{\nu^2} = \frac{\overline{oa}^2 - 3R^2}{4R^2(oa^2 - R^2)}.$$

Note. — La même question a été résolue par MM. Genty et Moret-Blanc.

Question 1455

(voir 3e série, t. II. p. 336);

PAR M. E. BARISIEN,

Lieutenant au 141e de ligne.

On considère deux droites rectangulaires et un cercle tangent à ces deux droites; le lieu des foyers des paraboles tangentes, à la fois, aux deux droites et à la circonférence, est une circonférence tangente aux deux droites. (WEILL.)

Prenons les deux droites rectangulaires OX, OY pour axes de coordonnées. Soient r le rayon du cercle, A, B les points de contact de la parabole avec les axes OX, OY; et P, Q les points où la tangente, commune en M au cercle et à la parabole, rencontre ces mêmes axes (1).

Posons

$$OA = \alpha, \quad OB = \beta, \quad OP = p, \quad OQ = q.$$

(1) Le lecteur est prié de faire la figure.

On sait que l'équation générale des paraboles tangentes aux trois côtés OP, OQ, PQ d'un triangle rectangle peut se mettre sous la forme

$$(1) \qquad \sqrt{\frac{x}{\alpha}} + \sqrt{\frac{y}{6}} = 1,$$

avec la condition

$$(2) \qquad \frac{p}{\alpha} + \frac{q}{6} = 1 \quad (^1).$$

Nous allons exprimer que le cercle et la parabole sont tangents au même point M à la droite PQ. Pour cela, commençons par écrire que PQ est tangent au cercle en M, puis ensuite que le point M de contact est sur la parabole.

Le triangle rectangle POQ donne

$$\overline{PQ}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2,$$

ou

$$(MP + MQ)^2 = p^2 + q^2.$$

Mais

$$MP = p - r \quad \text{et} \quad MQ = q - r;$$

donc

$$(p + q - 2r)^2 = p^2 + q^2,$$

$$(3) \qquad p + q - 2r = \sqrt{p^2 + q^2},$$

relation qui revient à

$$(4) \qquad pq = 2r(p + q - r).$$

Actuellement, menons du point M les perpendiculaires MR, MS aux axes OX, OY. Les coordonnées x, y de M s'obtiennent facilement au moyen des triangles semblables MSQ, MRP et OPQ. En effet

$$\frac{MS}{MQ} = \frac{OP}{PQ}; \quad \text{d'où MS} \quad \text{ou } x = \frac{p(q-r)}{\sqrt{p^2+q^2}} = \frac{p(q-r)}{p+q-2r}.$$

---

(1) Les formules (1) et (2) ont déjà été employées dans les *Nouvelles Annales* (*voir* 2e série, t. XI, p. 88).

De même

$$y = \frac{q(p-r)}{p+q-2r}.$$

En portant ces valeurs des coordonnées du point M dans l'équation (1) de la parabole, équation qui peut s'écrire

$$\left(\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{6} - 1\right)^2 = \frac{4xy}{\alpha 6},$$

on a

$$\left[\frac{p(q-r)}{\alpha} + \frac{q(p-r)}{6} - (p+q-2r)\right]^2 = \frac{4pq}{\alpha 6}(q-r)(p-r),$$

ou

$$\left[pq\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{6}\right) - r\left(\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{6}\right) - (p+q)+2r\right]^2$$
$$= \frac{4pq}{\alpha 6}\left[pq - r(p+q-r)\right].$$

En tenant compte des relations (2) et (4), il vient

$$\left[pq\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{6}\right) - \frac{pq}{2r}\right]^2 = \frac{4pq}{\alpha 6}\left(pq - \frac{pq}{2}\right).$$

et enfin

$$(5) \qquad \alpha 6\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2r}\right)^2 = 2.$$

Le foyer F de la parabole est à l'intersection de la droite AB et de la perpendiculaire OF abaissée du point O sur AB. Ces deux droites ont pour équations

$$(6) \qquad 6x + \alpha y = \alpha 6,$$
$$(7) \qquad \alpha x - 6y = 0.$$

Pour avoir l'équation du lieu des foyers, il suffit d'éliminer α et 6 entre les équations (5), (6) et (7).

Or des équations (6) et (7) on tire

$$\alpha = \frac{x^2+y^2}{x}, \quad 6 = \frac{x^2+y^2}{y}.$$

En portant ces valeurs de α, β dans l'équation (5), on a

$$[x^2+y^2-2r(x+y)]^2 = 8r^2xy;$$

et, en développant et supprimant le facteur (x^2+y^2), il vient

$$x^2+y^2-4r(x+y)+4r^2=0,$$

équation qui représente un cercle tangent aux axes, et de rayon $2r$ [1].

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.

Question 1476

(voir 3e série, t. II, p. 479);

PAR M. E. FAUQUEMBERGUE.

Trouver les solutions entières de l'équation

$$x^3+x^2+x+1=v^2.$$

(LIONNET.)

Cette question, proposée autrefois par M. Brocard, a été résolue complètement par M. Gerono dans le numéro de mai 1877 des *Nouvelles Annales*. L'équation ci-dessus n'admet en réalité que les solutions $x=1$, $x=7$. Ce théorème remarquable peut aussi se déduire d'une proposition de Fermat, énoncée dans les recherches de M. Ch. Henry sur les manuscrits de l'illustre géomètre.

L'équation proposée peut, en effet, s'écrire

$$(x+1)(x^2+1)=v^2,$$

et, après avoir remarqué que les facteurs $(x+1)$ et

---

[1] La circonférence que cette équation représente est, au point F, tangente à la circonférence circonscrite au triangle rectangle OPQ. Le milieu de la droite OF est le point de contact du cercle des neuf points du triangle OPQ, et du cercle inscrit à ce triangle. (G.)

(x^2+1) ont 2 pour diviseur commun, on est conduit au système d'équations $(x+1)=2m^2$, $x^2+1=2n^2$.

Or la proposition de Fermat, dont nous parlons, revient à dire que le système de ces deux équations n'admet de solutions en nombres entiers que pour $x=7$ (en écartant les solutions évidentes $x=\pm 1$).

M. Genocchi a donné une démonstration très simple de ce théorème dans le numéro de juillet 1883 des *Nouvelles Annales*.

Question 1495

(voir 3e série, t. III, p. 399);

PAR M. N. GOFFART.

Le nombre total des solutions entières, non négatives, des équations

$$\begin{aligned} x + 4y &= 3(n-1),\\ 4x + 9y &= 5(n-2),\\ 9x + 16y &= 7(n-3),\\ &\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

est égal à n.

(ERNEST CESARO.)

La forme générale des équations ci-dessus est

$$a^2x+(a+1)^2y=[(a+1)^2-a^2](n-a);$$

on en tire

$$\frac{a^2}{(a+1)^2}=\frac{n-a-y}{n-a+x}.$$

Or, a et $a+1$ étant premiers entre eux, $n-a+x$ et $n-a-y$ sont respectivement des équimultiples de $(a+1)^2$ et de a^2; donc on a, pour les systèmes de solutions générales des équations ci-dessus,

$$\begin{aligned} n-a-y &= ma^2,\\ n-a+x &= m(a+1)^2; \end{aligned}$$

d'où

$$x = m(a+1)^2 - (n-a),$$
$$y = (n-a) - ma^2.$$

Si l'on écarte les solutions négatives, il faut poser

$$ma^2 \leq n - a \leq m(a+1)^2$$

ou

$$\frac{n-a}{a^2} \geq m \geq \frac{n-a}{(a+1)^2}.$$

En attribuant à a toutes les valeurs de 1 à n, on voit que m peut recevoir toutes les valeurs entières comprises dans la suite

$$\frac{n-1}{1} \cdots \frac{n-1}{2^2}, \quad \frac{n-2}{2^2} \cdots \frac{n-2}{3^2},$$
$$\frac{n-3}{3^2} \cdots \frac{n-3}{4^2}, \cdots \frac{n-n}{n^2} \cdots \frac{n-n}{(n+1)^2}.$$

Soit

$$m = n-1,\ n-2\ \ldots\ 2,\ 1,\ 0,$$

en tout n valeurs. C. Q. F. D.

Application. $n = 10$.

$a = 1,\quad \frac{10-1}{1} \geq m \geq \frac{10-1}{4};\quad$ d'où $\quad m = 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3$

et

$$\begin{cases} x = 27,\ 23,\ 19,\ 15,\ 11,\ 7,\ 3, \\ y = \ \ 0,\ \ 1,\ \ 2,\ \ 3,\ \ 4,\ 5,\ 6. \end{cases}$$

$a = 2,\quad \frac{10-2}{4} \geq m \geq \frac{10-2}{9},\quad$ d'où $\quad m = 2, 1$

et

$$\begin{cases} x = 10,\ 1, \\ y = \ \ 0,\ 4; \end{cases}$$

$a = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ ne donnent pas de solutions, m devant être entier. $a = 10$ donne

$$m = 0,$$
$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc et Renoy.

Question 1496

(voir 3ᵉ série, t. III, p. 399);

PAR M. N. GOFFART.

Une ellipse et une hyperbole sont telles que les asymptotes de l'hyperbole sont deux diamètres conjugués de l'ellipse; prouver que, en faisant un choix convenable d'axes de coordonnées, on pourra donner respectivement aux équations des deux courbes les formes

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=m.$$

(WOLSTENHOLME.)

Les deux courbes rapportées aux axes OX, OY qui sont des diamètres conjugués de l'ellipse et des asymptotes de l'hyperbole ont pour équations

$$(1)\qquad \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1,\quad xy=h^2.$$

Une droite $y=\rho x$ coupe l'ellipse en des points pour lesquels les tangentes auront une même direction si l'on pose

$$\rho=\pm\frac{\beta}{\alpha}.$$

Soient les nouveaux axes OX', OY' ayant pour équations

$$\alpha y-\beta x=0,\quad \alpha y+\beta x=0.$$

Faisons angle $XOX'=\varphi$, $XOY'=\varphi'$, $XOY=\theta$; les formules de transformation seront

$$(2)\qquad \begin{cases} y\sin\theta = x'\sin\varphi + y'\sin\varphi', \\ x\sin\theta = x'\sin(\theta-\varphi) - y'\sin(\varphi'-\theta). \end{cases}$$

Si l'on remarque qu'en outre

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\sin\varphi}{\sin(\theta - \varphi)} = \frac{\sin\varphi'}{\sin(\varphi' - \theta)},$$

les équations (1) se réduiront à

$$x'^2 \frac{2\sin^2\varphi}{\beta^2 \sin^2\theta} + y'^2 \frac{2\sin^2\varphi'}{\beta^2\sin^2\theta} = 1,$$

$$x'^2 \frac{\alpha\sin^2\varphi}{\beta h^2 \sin^2\theta} - y'^2 \frac{\alpha\sin^2\varphi'}{\beta h^2\sin^2\theta} = 1.$$

Et si l'on pose

$$\frac{\beta^2\sin^2\theta}{2\sin^2\varphi} = a^2, \quad \frac{\beta^2\sin^2\theta}{2\sin^2\varphi'} = b^2 \quad \text{et} \quad \frac{2h^2}{\alpha\beta} = m,$$

il viendra enfin

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = m.$$

C. Q. F. D.

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.

Question 1497

(voir 3ᵉ série, t. III, p. 399);

PAR M. MORET-BLANC.

Étant données deux droites fixes, on considère deux cercles de même rayon, tangents entre eux et touchant chacun une des droites. Le point commun à l'un de ces cercles et à la droite correspondante étant fixe, on demande le lieu du point de contact des deux cercles lorsqu'on fait varier leur rayon. (D'OCAGNE.)

Je prends le point de contact fixe pour origine, la tangente en ce point pour axe des y, et sa perpendiculaire pour axe des x. Soit b la distance de l'origine au sommet de l'angle que je suppose placé du côté des y

négatifs. L'équation du second côté sera

$$(1) \qquad y = mx - b.$$

r étant le rayon des courbes; x, y les coordonnées de leur point de contact; celles du centre du second cercle seront $2x - r$ et $2y$. Écrivons que le carré de la distance de ce point au centre du premier cercle est égal à $4r^2$, et que sa distance à la droite (1) est égale à r :

$$4(x-r)^2 + 4y^2 = 4r^2, \quad \text{ou} \quad (x-r)^2 + y^2 = r^2,$$

$$(2) \qquad x^2 + y^2 - 2rx = 0,$$

$$(3) \qquad 2y - 2mx + mr + b = \pm r\sqrt{1+m^2},$$

d'où

$$r = \frac{x^2+y^2}{2x} = \frac{2y - 2mx + b}{\pm\sqrt{1+m^2} - m}$$
$$= (m \pm \sqrt{1+m^2})(2y - 2mx + b),$$

et, en éliminant r,

$$[1 + 4m(m \pm \sqrt{1+m^2})]x^2$$
$$- 4(m \pm \sqrt{1+m^2})xy + y^2 - 2b(m \pm \sqrt{1+m^2})x = 0.$$

Le lieu se compose de deux hyperboles.

Note. — La même question a été résolue par M. Goffart.

QUESTIONS.

1515. On donne une ellipse; les normales à cette ellipse aux points P, Q se rencontrent en R de telle sorte que les droites OR et PQ sont également inclinées sur les axes, O étant le centre de l'ellipse. On demande de démontrer :

1° Que la partie de PQ, comprise entre les axes, est de longueur constante;

2° Que les deux autres normales menées de R à l'ellipse forment entre elles un angle droit.

(WOLSTENHOLME.)

1516. On mène la normale en un point P d'une ellipse donnée; cette normale coupe les axes aux points Q, R; sur QR comme diamètre on décrit un cercle; par un point quelconque S de la tangente à l'ellipse au point P, on mène des tangentes à ce cercle : démontrer que la corde de l'ellipse qui passe par les points de contact sous-tend un angle droit au point P.

(WOLSTENHOLME.)

1517. On donne une parabole et une autre conique, et l'on mène les quatre tangentes communes qui touchent la conique en A, A', A'', A'''. Par le foyer F de la parabole, on mène un cercle touchant la conique en A, et la rencontrant en B et C, etc. Démontrer que les quatre droites BC, B'C', ..., concourent en un même point.

(WEILL.)

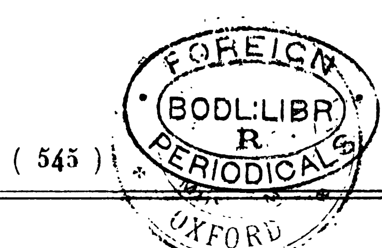
1518. Trouver une courbe plane telle que la projection de son rayon de courbure en un point M, sur une droite fixe du plan, soit proportionnelle à la partie de la tangente au point M, comprise entre ce point et la droite fixe. (BARBARIN.)

1519. On donne n tiges dont les longueurs sont représentées par $l_1, l_2, \ldots, l_i, \ldots, l_n$. Chacune de ces tiges est peinte en rouge à une de ses extrémités, en noir à l'autre. On casse, au hasard, un morceau de chacune de ces tiges. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n$ les longueurs des bouts qui portent la marque noire; quelle est la probabilité d'avoir

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = S,$$

S étant plus petit que $l_1 + l_2 + \ldots + l_n$?

(ED. DEWULF.)



ÉTUDE DE DEUX SYSTÈMES SIMPLES DE COORDONNÉES TANGENTIELLES DANS LE PLAN : COORDONNÉES PARALLÈLES ET COORDONNÉES AXIALES

(voir p. 516);

PAR M. MAURICE D'OCAGNE,
Élève-Ingénieur des Ponts et Chaussées.

COORDONNÉES AXIALES (1).

VI. — FORMULES FONDAMENTALES.

38. *Définition.* — On se donne une droite Ox, *axe* du système, et sur cette droite, un point O, *pôle* du système. Une droite est déterminée par l'angle θ qu'elle fait avec Ox et la distance λ de son point d'intersection avec Ox au point O. Les coordonnées λ et θ portent, bien entendu, leur signe.

Toute relation entre λ et θ définit alors une courbe par ses tangentes ; elle est l'équation de cette courbe.

39. *Transformation des coordonnées.*

1° On change de pôle, en conservant le même axe. Dans ces conditions, θ reste le même; si λ_1 est la nouvelle valeur de la coordonnée linéaire et si a est la distance, prise avec son signe, du nouveau pôle à l'ancien, on a

$$\lambda = \lambda_1 + \alpha. \qquad (1)$$

(1) Un système tout à fait analogue a été étudié par M. H.-J. PURKISS : *Notes on pedal coordinates* (*The Oxford, Cambridge and Dublin Messenger of Mathematics*, vol. III, p. 83; 1866). CH. B.

A la suite d'une Communication orale que je fis sur ce sujet à la *Société mathématique*, un membre de la Société me dit que ce système avait été aussi proposé par M. l'abbé Aoust. M. O.

2° On change d'axe, en conservant le même pôle. Si ω est l'angle du nouvel axe avec l'ancien, on a

(2) $$\theta = \theta_1 + \omega$$

et

$$\lambda \sin\theta = \lambda_1 \sin\theta_1;$$

d'où

$$\lambda = \frac{\lambda_1 \sin\theta_1}{\sin(\theta_1 + \omega)}.$$

3° On transporte l'axe parallèlement à lui-même, le pôle restant sur une perpendiculaire à la direction de cet axe. Alors, θ reste le même, et l'on a

(3) $$\lambda = \lambda_1 - h \cot\theta,$$

h étant la distance du nouvel axe à l'ancien.

Toute transformation peut, par décomposition, se ramener aux trois précédentes.

40. *Passage aux coordonnées parallèles.* — Prenons pour origines des coordonnées parallèles deux points de l'axe Ox équidistants du pôle O et pour axes des u et des v les perpendiculaires élevées par ces points à la droite Ox. Nous aurons, en appelant δ la distance commune des nouvelles origines au point O,

$$\text{tang}\,\theta = \frac{v - u}{2\delta} = -\frac{u + v}{2\lambda}.$$

Pour passer des coordonnées axiales aux coordonnées parallèles, les formules seront donc

(4) $$\begin{cases} \text{tang}\,\theta = \dfrac{v - u}{2\delta}, \\ \lambda = \delta\dfrac{u + v}{u - v}. \end{cases}$$

Pour le passage inverse,

(4') $$\begin{cases} u = (\delta - \lambda)\,\text{tang}\,\theta, \\ v = -(\delta + \lambda)\,\text{tang}\,\theta. \end{cases}$$

41. *Relation avec les coordonnées ordinaires.* — Étant donnée l'équation en x et y d'une courbe, on formera très simplement l'équation en λ et θ de cette courbe rapportée à l'ancien axe des x pris pour axe des λ et à l'ancienne origine prise pour pôle, en prenant l'équation de la tangente à la courbe en fonction de son coefficient angulaire m, et remplaçant dans cette équation y par zéro, x par λ et m par $\operatorname{tang}\theta$.

42. *Équations de courbes usuelles.* — Ces équations se déduisent des équations correspondantes en x et y par le procédé qui vient d'être indiqué; les deux premières sont très aisées à obtenir directement.

Point,

$$\lambda = a - b\cot\theta,$$

a et b étant les coordonnées rectangulaires de ce point.

Cercle,

$$(\lambda - a)\sin\theta + b\cos\theta - R = 0,$$

a et b étant les coordonnées rectangulaires du centre et R le rayon. Si le cercle est tangent à Ox, c'est-à-dire si $b = R$, l'équation peut s'écrire

$$\lambda = a + R\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}.$$

Ellipse rapportée à son axe focal et à son centre,

$$\lambda^2 = a^2 + b^2\cot^2\theta,$$

a et b étant les demi-axes de la courbe.

Hyperbole,

$$\lambda^2 = a^2 - b^2\cot^2\theta.$$

Parabole rapportée à son axe et à son sommet,

$$\lambda + \frac{p}{2}\cot^2\theta = 0,$$

p étant le paramètre de la courbe.

43. *Équation générale des coniques.* — **Prenons l'équation générale des coniques en coordonnées parallèles**

$$Au^2 + 2Buv + Cv^2 + 2Du + 2Ev + F = 0,$$

et opérons la transformation indiquée au n° **40**; il vient pour l'équation en λ et θ correspondante

$$\begin{aligned}&[(A + 2B + C)\lambda^2\\&\quad + 2(C - A)\delta\lambda + (A - 2B + C)\delta^2]\,\mathrm{tang}^2\theta\\&\qquad - 2[(D + E)\lambda - (D - E)\delta]\,\mathrm{tang}\,\theta + F = 0.\end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned}a &= A + 2B + C, & d &= -(D + E),\\ b &= (C - A)\delta, & e &= (D - E)\delta,\\ c &= (A - 2B + C)\delta^2, & f &= F.\end{aligned}$$

L'équation devient

$$(a\lambda^2 + 2b\lambda + c)\,\mathrm{tang}^2\theta + (2d\lambda + 2e)\,\mathrm{tang}\,\theta + f = 0.$$

Ainsi donc, étant donnée une conique, on obtient, pour son équation en λ et θ, une expression, égalée à 0, qui contient un terme en $\mathrm{tang}^2\theta$ dont le coefficient est un trinôme du deuxième degré en λ, un terme en $\mathrm{tang}\,\theta$ dont le coefficient est un binôme du premier degré en λ, et un terme constant.

Réciproquement, toute équation de cette forme représente une conique, car les six équations précédentes permettent, lorsqu'on se donne arbitrairement δ, de déterminer A, B, C, D, E, F, en fonction de a, b, c, d, e, f. On trouve

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2} - \frac{b}{\delta} + \frac{c}{2\delta^2}\right), & D &= \frac{1}{2}\left(\frac{e}{\delta} - d\right),\\ B &= \frac{1}{4}\left(a - \frac{c}{\delta^2}\right), & E &= -\frac{1}{2}\left(d + \frac{e}{\delta}\right),\\ C &= \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{\delta} + \frac{c}{2\delta^2}\right), & F &= f.\end{aligned}$$

Remarquons que, si $a = A + 2B + C = 0$, la courbe est une parabole.

Pour reconnaître la nature de la courbe, formons (n° 25) la quantité

$$\mu = (A + 2B + C)[AE^2 - 2BDE + CD^2 + F(B^2 - AC)];$$

on trouve

$$\mu = \frac{a}{64\delta^2}[ae^2 - 2bde + cd^2 + f(b^2 - ac)].$$

On peut toujours faire en sorte que a soit > 0; il suffit donc de considérer le signe de

$$\Delta = ae^2 - 2bde + cd^2 + f(b^2 - ac);$$

c'est le discriminant de la forme obtenue en remplaçant, dans l'équation axiale de la conique, $\lambda \tang\theta$ par x et $\tang\theta$ par y, et l'on a

$$\begin{array}{ll} \Delta > 0 & \text{hyperbole,} \\ \Delta < 0 & \text{ellipse.} \end{array}$$

Si $\Delta = 0$, on a un système de deux points.

Pour déterminer le centre, les axes, etc., il suffit de prendre les équations trouvées en coordonnées parallèles, et d'y remplacer u et v par leurs valeurs en fonction de λ et θ, et les coefficients A, B, ... par leurs valeurs en fonction de a, b, ...

VII. — Étude générale des courbes.

44. *Détermination des points d'une courbe, répondant aux diverses tangentes.* — Si M est le point de contact d'une tangente MT (*fig.* 8) qui coupe Ox au point T, et si MT' est la tangente infiniment voisine, on a, dans le triangle infinitésimal MTT',

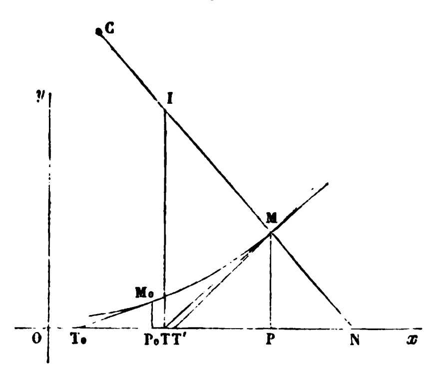
$$\frac{MT}{TT'} = \frac{\sin MT'x}{\sin TMT'},$$

ou, en désignant par t la longueur, prise avec son signe, de la tangente MT, et négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur,

$$t = \frac{d\lambda}{d\theta} \sin \theta. \tag{5}$$

On déduit de là que si la perpendiculaire élevée à Ox

Fig. 8.



par le point T coupe au point I la normale correspondante, on a

$$\text{TI} = \frac{d\lambda}{d\theta}.$$

Les coordonnées du point M rapporté à l'axe Ox et à la perpendiculaire Oy à cet axe sont immédiatement données par les formules

$$y = \frac{d\lambda}{d\theta} \sin^2 \theta,$$

$$x = \lambda + \frac{d\lambda}{d\theta} \sin \theta \cos \theta.$$

Remarque. — Les valeurs de θ pour lesquelles $\frac{d\lambda}{d\theta} \sin \theta$ devient infini font connaître les asymptotes.

45. Les coordonnées λ et θ ne permettent pas de définir les droites parallèles à Ox; mais on peut déterminer les tangentes à une courbe donnée, parallèles à Ox, par leurs distances à cet axe, en cherchant la limite de $y = \frac{d\lambda}{d\theta}\sin^2\theta$ pour $\theta = K\pi$, et l'on a ensuite les points de contact de ces tangentes en cherchant la limite de

$$x = \lambda + \frac{d\lambda}{d\theta}\sin\theta\cos\theta$$

pour la même valeur de θ.

46. *Rayon de courbure.* — Nous avons appelé I le point où la perpendiculaire à Ox, élevée par le point T, coupe la normale à la courbe au point M; soit C le centre de courbure répondant à ce point M; nous avons, d'après une formule bien connue,

$$d(\mathrm{MT}) = \mathrm{CI}\,d\theta;$$

par suite,

$$\mathrm{MC} = \mathrm{MT} + \frac{d(\mathrm{MT})}{d\theta}$$

ou, en appelant r le rayon de courbure,

$$r = t\cot\theta + \frac{dt}{d\theta},$$

c'est-à-dire, d'après la formule (5),

$$r = 2\frac{d\lambda}{d\theta}\cos\theta + \frac{d^2\lambda}{d\theta^2}\sin\theta. \tag{6}$$

On a ensuite la longueur d'un arc de la courbe par la formule

$$s = \int_{\theta_0}^{\theta} r\,d\theta. \tag{7}$$

47. *Évaluation des aires.* — On a très simplement l'aire comprise entre la courbe, l'axe Ox, et deux tan-

gentes quelconques (λ_0, θ_0) et (λ, θ) en divisant cette aire en triangles infinitésimaux par les tangentes menées aux points intermédiaires entre M_0 et M; la surface de chacun de ces petits triangles est égale à

$$\tfrac{1}{2} t(t + dt) \sin d\theta,$$

ou, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur, à

$$\frac{t^2\, d\theta}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2}\left(\frac{d\lambda}{d\theta}\sin\theta\right)^2 d\theta;$$

il viendra, par suite, pour l'expression de l'aire cherchée

$$(8) \qquad \sigma = \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta}\left(\frac{d\lambda}{d\theta}\sin\theta\right)^2 d\theta.$$

Si l'on veut l'aire Σ comprise entre la courbe, l'axe Ox et les ordonnées M_0P_0 et MP, on a

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \Sigma &= \sigma + \text{tr.}\,\mathrm{MTP} - \text{tr.}\,\mathrm{M_0T_0P_0} \\ &= \frac{1}{2}\left[\int_{\theta_0}^{\theta}\left(\frac{d\lambda}{d\theta}\sin\theta\right)^2 d\theta \right. \\ &\qquad \left. + \left(\frac{d\lambda}{d\theta}\sin\theta\right)^2 \sin\theta\cos\theta - \left(\frac{d\lambda_0}{d\theta_0}\sin\theta_0\right)^2 \sin\theta_0\cos\theta_0\right]. \end{aligned} \right.$$

VIII. — Applications.

48. *Trouver une courbe dont la tangente ait une longueur constante l.* — Cette courbe est celle que décrit un point lié par un fil inextensible à un point qui se meut sur une droite indéfinie; de là le nom de *tractrice*.

La formule (5) (n° 44) donne immédiatement pour l'équation différentielle de la courbe

$$l = \frac{d\lambda}{d\theta}\sin\theta \quad \text{ou} \quad d\lambda = \frac{l\, d\theta}{\sin\theta}.$$

Intégrons, en faisant en sorte que $\lambda = 0$ pour $\theta = \frac{\pi}{2}$,

$$\lambda = l.\mathrm{L}\,\mathrm{tang}\,\frac{\theta}{2} \quad \text{ou} \quad e^{\frac{\lambda}{l}} = \mathrm{tang}\,\frac{\theta}{2}.$$

Telle est l'équation de la tractrice.

Cette courbe (*fig.* 9) présente un point de rebroussement A sur la perpendiculaire OY à OX et s'étend symétriquement de part et d'autre de cet axe en tendant asymptotiquement vers l'axe OX. On a

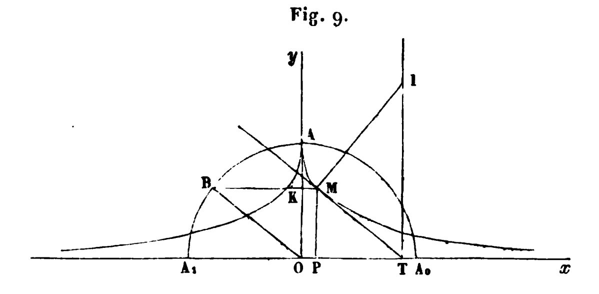
$$\frac{d\lambda}{d\theta} = \frac{l}{\sin\theta}, \quad \frac{d^2\lambda}{d\theta^2} = \frac{-l\cos\theta}{\sin^2\theta};$$

par suite, la formule (6) donne pour le rayon de courbure

$$r = l\cot\theta,$$

ce qui montre que le centre de courbure est au point de rencontre I de la normale à la courbe et de la per-

Fig. 9.



pendiculaire TI à Ox, résultat qu'il était bien aisé de prévoir.

Cherchons la longueur de l'arc, comptée à partir du point de rebroussement A. La formule (7) donne

$$s = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} l\cot\theta\, d\theta = l.\mathrm{L}\sin\theta.$$

Évaluons maintenant l'aire OAMT; nous avons, d'après la formule (8),

$$\sigma = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} l^2\, d\theta = \frac{\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) l^2}{2}.$$

Or traçons du point O comme centre un cercle de rayon égal à l, c'est-à-dire passant par le point A, et tirons la droite OB parallèle à MT; nous avons

$$\widehat{AOB} = \theta - \frac{\pi}{2};$$

donc

$$\text{aire secteur AOB} = \frac{\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) l^2}{2};$$

par suite,

$$\text{aire OAMT} = \text{aire OAB}.$$

Si nous voulons avoir l'aire OAMP, il suffit de retrancher de l'aire précédente celle du triangle MTP; et comme ce triangle est égal à OBK, on voit que

$$\text{aire OAMP} = \text{aire ABK}.$$

Il résulte de l'une ou l'autre de ces expressions que l'aire totale comprise entre la tractrice et l'axe Ox est égale à l'aire du demi-cercle OA_0AA_1.

49. *Trouver une courbe telle que la portion* TI (*fig.* 10) *de la perpendiculaire à* Ox *menée par le pied* T *de la tangente, et limitée, d'une part à* Ox, *de l'autre à la normale correspondante, ait une longueur constante* l. — Nous avons vu (n° 44) que

$$TI = \frac{d\lambda}{d\theta};$$

par suite,

$$\frac{d\lambda}{d\theta} = l$$

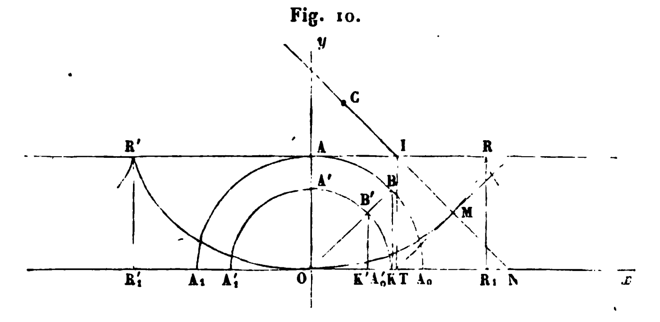
et

$$\lambda = l\theta,$$

en prenant $\lambda = 0$ pour $\theta = 0$.

C'est une cycloïde (*fig.* 10) dont les points de rebrous-

Fig. 10.



sement R, R', ... sont sur la parallèle à OX menée par le point A tel que $OA = l$.

L'équation de la courbe montre que, si l'on trace le demi-cercle $A_0 A A_1$ de centre O et de rayon égal à l, on a

$$OT = \text{arc}\, A_0 B.$$

De plus, d'après la formule (5), on a

$$MT = l \sin\theta = BK,$$

BK étant la perpendiculaire abaissée de B sur Ox.

La formule (6) donne, pour le rayon de courbure,

$$r = 2l\cos\theta,$$

ou, puisque $TI = l$,

$$MC = 2MI;$$

on reconnaît bien là une des propriétés caractéristiques de la cycloïde.

La formule (7) donne, pour l'arc compté à partir du

point O,

$$s = 2l\int_0^\theta \cos\theta\, d\theta = 2l\sin\theta = 2\,\mathrm{MT} = 2\,\mathrm{BK}.$$

L'arc OR a donc pour longueur $2l$.

Quant à l'aire OMT, elle est donnée, d'après la formule (8), par

$$\sigma = \frac{1}{2}\int l^2 \sin^2\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{l^2\theta}{2} - \frac{l^2\sin 2\theta}{4}\right).$$

Mais nous avons

$$\text{aire secteur } \mathrm{OA_0B} = \frac{l^2\theta}{2},$$

$$\text{aire triangle OBK} = \frac{1}{2}\, l\cos\theta . l\sin\theta = \frac{l^2\sin 2\theta}{4};$$

par suite,

$$\text{aire OMT} = \frac{\text{aire } \mathrm{A_0BK}}{2}.$$

On peut aussi prendre le demi-cercle $A'_0A'A'_1$ de rayon égal à $\frac{l}{\sqrt{2}}$, et qui est coupé par OB au point B'; on a

$$\text{aire OMT} = \text{aire } \mathrm{A'_0B'K'}.$$

Il résulte de là que

$$\text{aire } \mathrm{ORR_1} = \frac{\text{aire } \mathrm{A_0BAO}}{2} = \text{aire } \mathrm{A'_0B'A'O}.$$

50. *Trouver une courbe telle que la distance* OD *de chacune de ses tangentes au point* O *soit égale à la longueur* MN *de la normale correspondante* (*fig.* 11). — La distance OD du point O à la tangente (λ, θ) est égale à $\lambda\sin\theta$.

Quant à la normale, elle est donnée par

$$\mathrm{MN} = \mathrm{MT}\,\mathrm{tang}\,\theta = \frac{d\lambda}{d\theta}\,\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}.$$

On doit donc avoir (¹)

$$\lambda \sin\theta = \frac{d\lambda}{d\theta}\,\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta},$$

ou

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{d\theta}{\tan g\theta}.$$

Intégrons, il vient

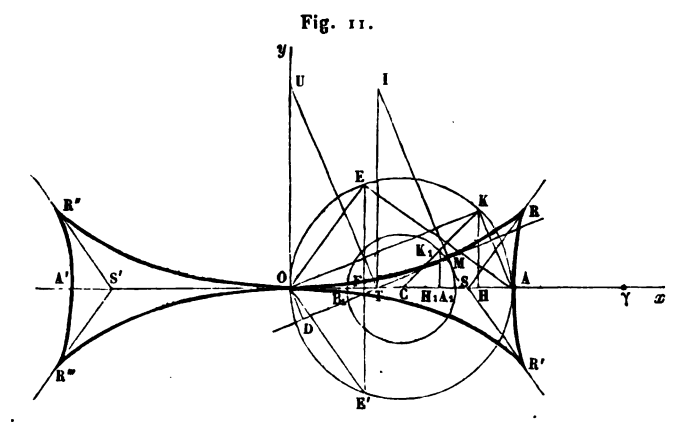
$$L\lambda = L\sin\theta + C$$

ou

$$\lambda = a\sin\theta.$$

Telle est l'équation de la courbe cherchée; étudions en

Fig. 11.



détail ses propriétés géométriques qui, on va le voir, sont assez curieuses.

D'abord la longueur de la tangente est donnée, d'après la formule (5), par

$$t = a\cos\theta\sin\theta.$$

Cette équation, jointe à la précédente, montre que la

(¹) Il est important de remarquer que nous supposons ici les segments OD et MN de part et d'autre de la tangente; dans le cas contraire, il faudrait changer le signe du second membre, et l'on trouverait pour solutions une parallèle à Ox et un cercle de centre O.

courbe peut se construire point par point de la manière suivante : portons sur l'axe Ox la longueur $OA = a$, et traçons le cercle, de centre C, qui a OA pour diamètre; tirons la droite OK faisant avec Ox l'angle θ et joignons le point A au point K; nous avons

$$AK = OA \sin\theta = a \sin\theta = \lambda;$$

abaissons maintenant sur Ox la perpendiculaire KH; nous avons

$$KH = AK \cos\theta = a \sin\theta \cos\theta = t;$$

de là, la construction suivante : *porter sur* Ox *la longueur* $OT = AK$, *puis sur la parallèle à* OK, *menée par le point* T, *la longueur* $TM = HK$; *on a ainsi la tangente* MT *et son point de contact* M.

MN étant la normale, remarquons que

$$TN = \frac{TM}{\cos\theta} = a \sin\theta = OT,$$

propriété que nous pouvons énoncer ainsi : *le segment de l'axe* Ox *compris entre la tangente et la normale est égal au* λ *de la tangente.*

De ce que $AK = OT = TN$, résulte l'égalité des triangles OAK et INT, IT étant perpendiculaire à Ox; par suite,

$$IN = OA = a,$$

c'est-à-dire que *la portion de la normale comprise entre l'axe* Ox *et la perpendiculaire à cet axe menée par le point* T *est constante et égale à* a.

Remarquons aussi que $IT = OK$.

Par le point T, élevons à MT une perpendiculaire qui coupe l'axe Oy au point U; puisque $OT = TN$, les triangles OTU et TNI sont égaux, et par suite

$$TU = NI = a;$$

le segment TU est de longueur constante; de là ce théorème :

Si l'un des côtés d'un angle droit est de longueur constante et glisse entre deux axes rectangulaires, l'autre côté enveloppe la courbe qui nous occupe. Cela fournit un mode de génération mécanique de cette courbe, par ses tangentes.

Le rayon de courbure, d'après la formule (6), est donné par

$$r = 2a\cos^2\theta - a\sin^2\theta = \frac{a}{2} + \frac{3a}{2}\cos 2\theta,$$

expression qui se construit géométriquement de la manière suivante : *prendre sur* Ox *le segment* $C\gamma = 3\,CH$; *le rayon de courbure au point* M *est égal à* $O\gamma$, car

$$\widehat{KCA} = 2\,\widehat{KOA} = 2\theta.$$

Valeurs remarquables du rayon de courbure :

Au point O, $r = 2a$.

Aux points pour lesquels $\cos 2\theta = \frac{1}{3}$ et qui s'obtiennent en prenant pour la longueur CH le $\frac{1}{3}$ de CA, $r = a$.

Aux points pour lesquels $\theta = \frac{\pi}{4} + K\frac{\pi}{2}$, $r = \frac{a}{2}$.

Aux points A et A', $r = -a$.

Il y a quatre points de rebroussement R, R', R'', R''' correspondants aux valeurs de θ pour lesquelles r s'annule, c'est-à-dire pour lesquelles $\cos 2\theta = -\frac{1}{3}$. Pour obtenir ces points, prenons le segment CF égal à $\frac{CA}{3}$ et compté négativement à partir du point C, puis élevons par le point F la perpendiculaire EE' à Ox; prenant $OS = AE$, menant par le point S des parallèles à OE et OE', et portant sur ces droites les segments SR et SR' égaux à EF, nous avons les points de rebroussement R

et R'. Les autres sont les symétriques de ceux-ci par rapport à Oy, car la portion de la courbe, à gauche de Oy, répondant aux valeurs de θ comprises entre π et 2π, est symétrique de la portion à droite qui correspond aux valeurs comprises entre O et π. D'ailleurs, chacune de ces branches se compose elle-même de deux parties symétriques par rapport à Ox.

La courbe est ainsi parfaitement connue de forme; il reste à en trouver la rectification et la quadrature.

La longueur de l'arc, comptée à partir du point O, est donnée par

$$s = \int_0^\theta r\,d\theta = \int_0^\theta \left(\frac{a}{2} + \frac{3a}{2}\cos 2\theta\right) d\theta = \frac{a\theta}{2} + \frac{3a}{4}\sin 2\theta.$$

Traçons le cercle de centre C, dont le rayon CA_1 est moitié de CA, c'est-à-dire égal à $\frac{a}{4}$; ce cercle est coupé par CK au point K_1; abaissons sur Ox la perpendiculaire K_1H_1; nous avons

$$\text{arc } A_1K_1 = \frac{a}{4}2\theta = \frac{a\theta}{2},$$

$$K_1H_1 = \frac{a}{4}\sin 2\theta;$$

donc

$$\text{arc OM} = \text{arc } A_1K_1 + 3K_1H_1.$$

Pour l'aire comprise entre la courbe, l'axe Ox, et la tangente MT, elle est donnée, d'après la formule (8), par

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{1}{2}\int_0^\theta (a\cos\theta\sin\theta)^2\,d\theta \\ &= \frac{a^2}{8}\int_0^\theta \sin^2 2\theta\,d\theta = \frac{a^2}{16}\left(\theta - \frac{\sin 4\theta}{4}\right);\end{aligned}$$

Or,

$$\text{aire secteur } CA_1K_1 = \frac{1}{2}\frac{a^2}{16}2\theta = \frac{a^2\theta}{16},$$

$$\text{aire } CK_1H_1 = \frac{1}{2}\frac{a}{4}\cos 2\theta\frac{a}{4}\sin 2\theta = \frac{a^2\sin 4\theta}{4\times 16};$$

par suite,

$$\text{aire OMT} = \text{aire } CA_1K_1 - CK_1H_1 = \text{aire } A_1K_2H_1.$$

De là résulte que

$$\text{aire ORA} = \text{aire } A_1K_1B_1$$

et

$$\text{aire ORR}' = \text{aire cercle } A_1B_1.$$

(*A suivre.*)

ALGORITHME ISOBARIQUE;

PAR M. ERNEST CESARO.

1. Depuis longtemps nous avons entrepris l'étude d'un important algorithme, qui comprend comme cas particulier la fonction *aleph* de Wronski ([1]), dont il a été récemment question dans ce Recueil, dans deux articles de M. d'Ocagne. Trois essais, fort incomplets, ont déjà paru dans notre premier *Mémoire d'Arithmétique* dans le *Journal de Battaglini* (1884), et dans les *Nouvelles Annales* (même tome, p. 431).

Nous voulons y joindre un quatrième essai, qui servira à montrer, sous une plus vive lumière, toute l'importance de l'algorithme en question. Une étude complète formera l'objet d'une thèse, qui sera présentée sous peu à la Faculté des Sciences de Rome.

2. Nous appelons *algorithme isobarique* d'une fonction $f(x)$, et nous représentons par

$$\mathop{\mathrm{S}}_{p}^{m} f(x)$$

([1]) Cette fonction a été considérée dans les *Nouvelles Annales* mêmes, 1re série, t. XVI, p. 248 et 416, par MM. Brioschi et Catalan.

la somme de tous les produits, analogues à

$$f(x_1)\,f(x_2)\ldots f(x_m),$$

où

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = p,$$

en nombres entiers, de toutes les manières possibles, que celles-ci soient ou non *essentiellement distinctes*. Nous appelons *poids* et *degré* de l'algorithme les enticrs p et m, respectivement. En particulier,

$$\overset{1}{\underset{p}{\mathrm{S}}} f(x) = f(p),$$

$$\overset{2}{\underset{p}{\mathrm{S}}} f(x) = f(1)f(p-1) + f(2)f(p-2) + \ldots + f(p-1)f(1),$$

....,

$$\overset{p-1}{\underset{p}{\mathrm{S}}} f(x) = (p-1)f^{p-2}(1)f(2), \quad \overset{p}{\underset{p}{\mathrm{S}}} f(x) = f^p(1), \quad \ldots\ldots\ldots$$

Nous n'avons pas l'intention d'exposer les propriétés de l'algorithme S, qui sont, d'ailleurs, faciles à établir d'une manière tout à fait élémentaire, ainsi qu'on peut le voir dans notre article *Su talune funzioni isobariche-omogenee,* inséré au *Journal de Battaglini*. Nous nous contenterons de donner quelques formules, propres à montrer comment l'algorithme S trouve de nombreuses et intéressantes applications, dans des questions d'analyse très variées.

3. Soit s_p la *somme des $p^{\text{ièmes}}$ puissances* de quantités quelconques $z_1, z_2, \ldots, z_n$, et c_p la *somme des produits p à p* des mêmes quantités. Convenons de prendre $c_p = 0$, lorsque p est supérieur à n ou inférieur à 1. On sait que, dans son *Arithmétique universelle,* Newton a

donné la formule

$$pc_p = s_1 c_{p-1} - s_2 c_{p-2} + \ldots \mp s_{p-1} c_1 \pm s_p,$$

qui permet de calculer, de proche en proche, les expressions de s_1, s_2, s_3, ..., en fonction des quantités c. Or, par l'algorithme isobarique, on a immédiatement

$$(1) \qquad s_p = \sum_{m=1}^{m=p} \left[(-1)^{p+m} \frac{p}{m} \mathop{\mathrm{S}}_{p}^{m} (c_x) \right].$$

Voulons-nous, par exemple, l'expression de s_4, nous disposerons les calculs comme il suit :

$4 = 4$	1 solut.	$\frac{4}{m} = 4$	$4c_4$	$-$
$1 + 3$	2 »	2	$4c_1 c_3$	$+$
$2 + 2$	1 »	2	$2c_2^2$	$+$;
$1 + 1 + 2$	3 »	$\frac{4}{3}$	$4c_1^2 c_2$	$-$
$1 + 1 + 1 + 1$	1 »	1	c_1^4	$+$

donc

$$s_4 = c_1^4 - 4c_1^2 c_2 + 2c_2^2 + 4c_1 c_3 - 4c_4.$$

Inversement, on a

$$(2) \qquad c_p = \sum_{m=1}^{m=p} \left[\frac{(-1)^{p+m}}{1.2.3\ldots m} \mathop{\mathrm{S}}_{p}^{m} \left(\frac{s_x}{x}\right) \right].$$

Par exemple,

$$c_4 = \tfrac{1}{24} s_1^4 - \tfrac{1}{4} s_1^2 s_2 + \tfrac{1}{8} s_2^2 + \tfrac{1}{3} s_1 s_3 - \tfrac{1}{4} s_4.$$

Quelquefois nous aurons besoin de considérer s_p comme la somme des $p^{\text{ièmes}}$ puissances des racines de l'équation

$$z^n - c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} - \ldots \pm c_n = 0.$$

Si $c_p = (-1)^p$, la relation (1) donne

$$s_p = \sum_{m=1}^{m=p} \left[(-1)^{p+m} \frac{p}{m} \mathop{\mathrm{S}}_{p}^{m} (-1)^x \right] = \sum_{m=1}^{m=p} [(-1)^m \mathrm{C}_{p,m}] = -1.$$

Portant cette valeur dans la relation (2), on obtient la formule

$$\sum_{m=1}^{m=p} \left[\frac{1}{1.2.3\ldots m} \mathop{\mathrm{S}}_{p}^{m} \left(\frac{1}{x}\right) \right] = 1,$$

donnée par Cauchy dans ses *Exercices d'Analyse* (III, 173).

4. En faisant varier le système des quantités z, les relations (1) et (2) prennent une infinité d'autres formes, plus ou moins intéressantes. En particulier, on peut s'en servir pour déterminer les coefficients des puissances de n, dans l'expression de la *somme* $S_{n,p}$ *des produits p à p des n premiers nombres entiers*. Proposons-nous, par exemple, de chercher, dans cette expression, le terme de plus haut degré. On sait que

$$s_p = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{1}{2} n^p + \ldots + B_p n,$$

où B_p est le $p^{\text{ième}}$ des *nombres de Bernoulli,* définis par l'égalité symbolique

$$(3) \qquad (B+1)^p - B^p = p.$$

D'après cela, le terme de plus haut degré, dans $s_{x_1} s_{x_2} \ldots s_{x_m}$, est celui qui contient $n^{(x_1+1)+(x_2+1)+\ldots+(x_m+1)} = n^{p+m}$. On aura un exposant maximum pour $m = p$; mais alors $x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 1$, et la formule (2) montre que le terme de plus haut degré, dans $S_{n,p}$, est

$$\frac{(-1)^{2p}}{1.2.3\ldots p} \frac{n^{2p}}{2^p} = \frac{n^{2p}}{2.4.6\ldots 2p}.$$

Quel est le coefficient de n? Puisque s_p ne contient pas de terme indépendant, le terme de degré minimum, dans $s_{x_1} s_{x_2} \ldots s_{x_m}$, est celui qui contient n^m. Il faut donc prendre $m = 1$, et l'on voit alors que, dans le second

membre de (2), le coefficient de n est $(-1)^{p+1}\frac{B_p}{p}$. Ainsi

$$S_{n,p} = \frac{n^{2p}}{2.4.6\ldots 2p} + \cdots + \frac{(-1)^{p+1}}{p} B_p n.$$

5. Le dernier résultat est d'accord avec l'expression de $S_{n,p}$ que nous avons donnée dans notre premier *Mémoire d'Arithmétique*. On s'assure qu'il est aussi d'accord avec cette autre formule

$$S_{n,p} = A_{1,p} C_{n+1,2p} + A_{2,p} C_{n+2,2p} + \ldots + A_{p,p} C_{n+p,2p},$$

où les nombres A sont faciles à calculer, d'après la loi de formation,

$$A_{m,p} = m A_{m,p-1} + (2p - m) A_{m-1,p-1},$$

et en prenant $A_{m,p} = 0$, lorsque m est inférieur à 1 ou supérieur à p. En particulier,

$$A_{1,p} = 1, \quad A_{p,p} = 1.2.3\ldots p.$$

Les propriétés de ces nombres seront données dans la Thèse annoncée. En voici quelques-unes :

$$A_{1,p} + A_{2,p} + A_{3,p} + \ldots + A_{p,p} = 1.3.5\ldots(2p-1),$$

$$\frac{A_{1,p}}{C_{2p-1,1}} - \frac{A_{2,p}}{C_{2p-1,2}} + \frac{A_{3,p}}{C_{2p-1,3}} - \ldots \pm \frac{A_{p,p}}{C_{2p-1,p}} = \pm 2 B_p.$$

Les valeurs des premiers nombres A sont

p	$A_{1,p}$	$A_{2,p}$	$A_{3,p}$	$A_{4,p}$	$A_{5,p}$	$A_{6,p}$	$A_{7,p}$	...
1	1	0	0	0	0	0	0	...
2	1	2	0	0	0	0	0	...
3	1	8	6	0	0	0	0	...
4	1	22	58	24	0	0	0	...
5	1	52	328	444	120	0	0	...
6	1	114	1452	4400	3708	720	0	...
7	1	240	5610	32120	58140	33984	5040	...
.	.	...	....	.....	.....	.....	....	...

Par exemple,

$$S_{n,4} = C_{n+1,8} + 22\,C_{n+2,8} + 58\,C_{n+3,8} + 24\,C_{n+4,8},$$

ou bien, après quelques réductions simples,

$$S_{n,4} = \frac{1}{5760}(n+1)n(n-1) \times (n-2)(n-3)(15n^3 + 15n^2 - 10n - 8).$$

6. Soit

$$(4) \qquad e^{M_0 + M_1 z + M_2 z^2 + \ldots} = N_0 + N_1 z + N_2 z^2 + \ldots.$$

Pour plus de simplicité, supposons $N_0 = 1$, et, par suite, $M_0 = 0$. On démontre aisément les relations

$$(5) \qquad N_p = \sum_{m=1}^{m=p} \left[\frac{1}{1.2.3\ldots m} \mathop{\mathrm{S}}_{p}^{m} (M_x) \right],$$

$$(6) \qquad M_p = \sum_{m=1}^{m=p} \left[\frac{(-1)^{m+1}}{m} \mathop{\mathrm{S}}_{p}^{m} (N_x) \right].$$

7. Voici une application remarquable des dernières formules. Soit

$$F(z) = f(a) + f(b) + f(c) + \ldots,$$

a, b, c, ... étant *tous les diviseurs* de z. On sait que

$$\frac{z f(1)}{1-z} + \frac{z^2 f(2)}{1-z^2} + \frac{z^3 f(3)}{1-z^3} + \ldots = z\,F(1) + z^2\,F(2) + z^3\,F(3) + \ldots.$$

On en déduit sans peine

$$(7) \qquad \left\{ \begin{array}{l} (1-z)^{f(1)} (1-z^2)^{\frac{f(2)}{2}} (1-z^3)^{\frac{f(3)}{3}} \ldots \\ \quad = e^{-z\,F(1) - \frac{z^2}{2} F(2) - \frac{z^3}{3} F(3) - \ldots} \end{array} \right.$$

La formule (5) permet de développer le premier membre suivant les puissances de z. Si $f(z) = z$, on a $F(z) = \int z$,

en employant la notation d'Euler; par suite,

$$\mathrm{M}_p = -\frac{1}{p}\int p.$$

D'autre part, d'après une formule d'Euler, on sait que, si p a la forme $\frac{1}{2}(3k^2 \pm k)$, c'est-à-dire s'il appartient à l'une des séries

$$1,\ 5,\ 12,\ 22,\ 35,\ 51,\ 70,\ \ldots,$$
$$2,\ 7,\ 15,\ 26,\ 40,\ 57,\ 77,\ \ldots,$$

on a $\mathrm{N}_p = (-1)^k$. Dans les autres cas, $\mathrm{N}_p = 0$. Ainsi

$$(1-z)(1-z^2)(1-z^3)\ldots$$
$$= 1 - z - z^2 + z^5 + z^7 - z^{12} - z^{15} + z^{22} + \ldots.$$

En laissant aux nombres N leur dernière signification, on a, d'après (6),

$$(8) \qquad \int p = p\sum_{m=1}^{m=p}\left[\frac{(-1)^m}{m}\mathop{\mathrm{S}}_p^m(\mathrm{N}_x)\right],$$

expression curieuse de la *somme des diviseurs* de p. Par exemple, on a

$$\int 4 = -4\mathrm{N}_4 + 4\mathrm{N}_1\mathrm{N}_3 + 2\mathrm{N}_2^2 - 4\mathrm{N}_1^2\mathrm{N}_2 + \mathrm{N}_1^4,$$

où

$$\mathrm{N}_1 = \mathrm{N}_2 = -1, \quad \mathrm{N}_3 = \mathrm{N}_4 = 0.$$

8. On a aussi

$$(1-z)^{-1}(1-z^2)^{-1}(1-z^3)^{-1}\ldots$$
$$= \sum_{m=0}^{m=\infty}\psi(m)z^m = e^{z\int 1 + \frac{z^2}{2}\int 2 + \frac{z^3}{3}\int 3 + \ldots},$$

$\psi(m)$ étant le *nombre des décompositions,* essentiellement différentes, *de* m, *en parties entières, égales ou inégales*. Donc, au lieu de (8), on peut écrire

$$\int p = p\sum_{m=1}^{m=p}\left[\frac{(-1)^{m+1}}{m}\mathop{\mathrm{S}}_p^m\psi(x)\right].$$

En outre, les fonctions $\psi(x)$ et N_x sont liées par les relations isobariques

$$\psi(p) = \sum_{m=1}^{m=p} \left[(-1)^m \underset{p}{\overset{m}{\mathbf{S}}} (N_x) \right],$$

$$N_p = \sum_{m=1}^{m=p} \left[(-1)^m \underset{p}{\overset{m}{\mathbf{S}}} \psi(x) \right].$$

On peut faire d'importantes applications de l'algorithme $\mathbf{S}$ aux séries elliptiques.

9. Soit encore $f(z) = \varphi(z)$, et, par suite, $F(z) = z$. La formule (7) montre que, si l'on pose

$$P(z) = (1-z)^{\varphi(1)}(1-z^2)^{\frac{\varphi(2)}{2}}(1-z^3)^{\frac{\varphi(3)}{3}}\ldots,$$

on a aussi

$$P(z) = e^{-z-z^2-z^3-\ldots} = e^{\frac{z}{z-1}}.$$

On peut se proposer de déterminer les coefficients du développement

$$P(z) = 1 + N_1 z + N_2 z^2 + N_3 z^3 + \ldots.$$

Dans le cas actuel, la formule (5) donne

$$N_p = \sum_{m=1}^{m=p} \left[\frac{1}{1.2.3\ldots m} \underset{p}{\overset{m}{\mathbf{S}}} (-1) \right].$$

Or il est clair que $\underset{p}{\overset{m}{\mathbf{S}}}(-1)$ est égale à autant de fois $(-1)^m$ que l'équation $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = p$ admet de solutions *entières et positives;* donc

$$N_p = \sum_{m=1}^{m=p} (-1)^m \frac{C_{p-1,m-1}}{1.2.3\ldots m} = (-1)^p (u-1)^{p-1},$$

pourvu que, après avoir développé le second membre,

on y remplace u^m par $\frac{1}{1.2.3\ldots(m+1)}$. En se souvenant des formules fondamentales du *Calcul des différences*, on a finalement

$$N_p = (-1)^p \Delta^{p-1}(u_0).$$

On peut donc écrire, *symboliquement*,

$$(1-z)^{\varphi(1)}(1-z^2)^{\frac{\varphi(2)}{2}}(1-z^3)^{\frac{\varphi(3)}{3}}\ldots = 1 - \frac{z}{1+z\Delta},$$

ce qui veut dire qu'il faut remplacer, dans le second membre développé, Δ^p par la $p^{\text{ième}}$ différence du premier terme de la série

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2.3}, \frac{1}{2.3.4}, \frac{1}{2.3.4.5}, \ldots.$$

10. En vertu des formules (1), (2), (5), (6), si l'on pose $c_p = (-1)^p N_p$, on a $s_p = -p M_p$. En d'autres termes, *si p ne surpasse pas n*, la somme des $p^{\text{ièmes}}$ puissances des racines de l'équation

$$z^n + N_1 z^{n-1} + N_2 z^{n-2} + \ldots + N_n = 0$$

est $-pM_p$. Par exemple, *la somme des $p^{\text{ièmes}}$ puissances des racines de l'équation*

$$z^n - z^{n-1} - z^{n-2} + z^{n-5} + z^{n-7} - z^{n-12} - \ldots = 0$$

est égale à la somme des diviseurs de p. En particulier, les sommes des sept premières puissances des racines de l'équation

$$z^7 - z^6 - z^5 + z^2 + 1 = 0$$

sont 1, 3, 4, 7, 6, 12, 8. De même, *la somme des $p^{\text{ièmes}}$ puissances des racines de l'équation*

$$z^n + \frac{z^{n-1}}{1} + \frac{z^{n-2}}{1.2} + \frac{z^{n-2}}{1.2.3} + \cdots + \frac{1}{1.2.3\ldots n} = 0$$

est nulle, pourvu que $1 < p \leqq n$; car, si $N_p = \frac{1}{1.2.3\ldots p}$,

dans la formule (4), on sait que

$$M_1 = 1, \quad M_2 = M_3 = \ldots = 0.$$

On trouve, de la même manière, que *la somme des $p^{ièmes}$ puissances des racines de l'équation*

$$z^n + 2z^{n-1} + 3z^{n-2} + 5z^{n-3} + 7z^{n-4} + 10z^{n-5} + \ldots = 0$$

est égale, et de signe contraire, à la somme des diviseurs de p. Il suffit d'observer que, pour $N_p = \psi(p)$, on a $M_p = \frac{1}{p}\int p$.

11. La relation symbolique (3) donne

$$(9) \quad B_p = 1.2.3\ldots p \sum_{m=1}^{m=p} \left\{ (-1)^{p+m} \mathop{\mathrm{S}}_{p}^{m} \left[\frac{1}{1.2.3\ldots(x+1)} \right] \right\}.$$

Pour le calcul pratique, il est utile de substituer, à cette formule, la suivante :

$$(10) \quad B_{2p} = \frac{1.2.3\ldots 2p}{2^{2p-1}} \sum_{m=1}^{m=p} \left\{ (1)^{m+1} - \frac{p}{m} \mathop{\mathrm{S}}_{p}^{m} \left[\frac{1}{1.2.3\ldots(2x+1)} \right] \right\}.$$

Par exemple, pour $p = 2$,

$$B_4 = \sum_{m=1}^{m=2} \left[(-1)^{m+1} \frac{6}{m} \mathop{\mathrm{S}}_{2}^{m} f(x) \right],$$

en posant

$$f(x) = \frac{1}{1.2.3\ldots(2x+1)}.$$

Puis,

$$B_4 = 6f(2) - 3f^2(1) = \frac{6}{2.3.4.5} - \frac{3}{2.3.2.3} = -\frac{1}{30},$$

ce qui est exact.

12. La formule (10) montre que l'on peut poser, si-

multanément,

$$c_p = \frac{(-1)^p}{1.2.3\ldots(2p+1)}, \quad s_p = -\frac{2^{2p-1}B_{2p}}{1.2.3\ldots2p}.$$

Par conséquent, *la somme des $p^{\text{ièmes}}$ puissances des racines de l'équation*

$$z^n + \frac{z^{n-1}}{1.2.3} + \frac{z^{n-2}}{1.2.3.4.5} + \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots(2n+1)} = 0$$

est égale à

$$-\frac{2^{2p-1}B_{2p}}{1.2.3\ldots2p}.$$

Ceci permet aussi de développer en série la fonction y, définie par

$$e^y = 1 + \frac{z^2}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4.5} + \ldots,$$

c'est-à-dire

$$y = \log\frac{e^z - e^{-z}}{2z}.$$

On a

$$y = \frac{2}{1.2}B_2\frac{z^2}{1} + \frac{2^3}{1.2.3.4}B_4\frac{z^4}{2} + \frac{2^5}{1.2.3.4.5.6}B_6\frac{z^6}{3} + \ldots.$$

Par comparaison, on trouve

$$\int_0^z\left(\frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}} - \frac{1}{z}\right)dz = \log\frac{e^z - e^{-z}}{2z},$$

égalité évidente, qui fournit une vérification de nos formules.

13. A chaque relation entre les nombres de Bernoulli correspond une relation isobarique. Ainsi, l'égalité symbolique

$$(B + B)^p = pB_{p-1} - (p-1)B_p$$

donne

$$\frac{B_p}{1.2.3\ldots p} = \sum_{m=1}^{m=p}\left[(-1)^{p+m}\frac{p}{m}\mathop{\mathrm{S}}_p^m\left(\frac{B_x}{1.2.3\ldots x}\right)\right].$$

Voilà une formule digne d'intérêt. Elle montre que la somme des $p^{\text{ièmes}}$ puissances des racines de l'équation

$$z^n - \frac{B_1}{1} z^{n-1} + \frac{B_2}{1.2} z^{n-2} - \ldots \pm \frac{B_n}{1.2.3\ldots n} = 0$$

est égale à

$$\frac{B_p}{1.2.3\ldots p}.$$

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Il y a une infinité de systèmes de n quantités, jouissant de la propriété que la somme de leurs produits p à p est égale à la somme de leurs puissances $p^{\text{ièmes}}$, *pour* $p = 1, 2, 3, \ldots, n$. *Chaque système est constitué par les racines de l'équation*

$$z^n - \frac{B_1}{1} \lambda z^{n-1} + \frac{B_2}{1.2} \lambda^2 z^{n-2} - \ldots \pm \frac{B_n}{1.2.3\ldots n} \lambda^n = 0,$$

dans laquelle on attribue à λ *une valeur particulière, arbitraire.*

Par exemple, pour $n = 3$, on a les quantités

$$0,\ \frac{\lambda}{12}(3 - \sqrt{-3}),\ \frac{\lambda}{12}(3 + \sqrt{-3}).$$

On arrive directement au même résultat, en mettant la *formule de Newton* sous la forme symbolique

$$(\gamma - \sigma)^p + (p - 1)\gamma_p = 0,$$

après avoir posé

$$c_p = \frac{\gamma_p}{1.2.3\ldots p}, \quad s_p = \frac{\sigma_p}{1.2.3\ldots p}.$$

Il suffit d'observer que les nombres de Bernoulli satisfont à la relation symbolique

$$(B - B)^p + (p - 1)B_p = 0,$$

et que, par conséquent, pour satisfaire à la formule de

Newton, de manière que $\gamma = \sigma$, on doit prendre

$$\gamma = \sigma = \lambda B.$$

14. On peut développer en série la fonction y, définie par l'égalité

$$e^y = 1 + \frac{B_1}{1} z + \frac{B_2}{1.2} z^2 + \frac{B_3}{1.2.3} z^3 + \ldots,$$

c'est-à-dire

$$y = \log \frac{z e^z}{e^z - 1}.$$

On a

$$y = \frac{B_1}{1} z - \frac{B_2}{1.2} \frac{z^2}{2} + \frac{B_3}{1.2.3} \frac{z^3}{3} - \ldots,$$

et l'on en déduit l'égalité évidente

$$\int_0^z \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{e^z - 1} \right) dz = \log \frac{z e^z}{e^z - 1},$$

nouvelle vérification de nos calculs.

15. Des calculs analogues peuvent être établis pour tout système de nombres, défini par une relation *récurrente*, et, en particulier, pour les *nombres d'Euler*, définis par l'égalité symbolique

$$(E + 1)^p + (E - 1)^p = 0. \tag{11}$$

Pour le calcul immédiat de ces nombres, on a la formule isobarique

$$E_{2p} = 1.2.3\ldots 2p \sum_{m=1}^{m=p} \left[(-1)^m \mathop{S}_{p}^{m} \left(\frac{1}{1.2.3\ldots 2x} \right) \right]. \tag{12}$$

On sait, d'ailleurs, que $E_{2p-1} = 0$.

16. Ce que nous avons dit sur les sommes des $p^{\text{ièmes}}$ puissances des racines de certaines équations ne cesse d'être vrai lorsque le degré de l'équation augmente

indéfiniment. Par exemple, si l'on considère l'équation

$$(1-z)(1-z^2)(1-z^3)\ldots=0,$$

on peut affirmer que la somme des diviseurs de p est égale à la somme des $p^{\text{ièmes}}$ puissances de toutes les racines de l'unité. Ce résultat est évident : il exprime une simple identité. On sait, en effet, que la somme des $p^{\text{ièmes}}$ puissances des racines $m^{\text{ièmes}}$ de l'unité est 0, *sauf lorsque m divise p*; dans ce cas, elle est m. Cela résulte aussi de la formule (1). Autre exemple, bien remarquable. La formule (10) a été obtenue en considérant, au lieu de l'égalité (3), cette autre égalité symbolique

$$(2B+1)^{2p+1}=4p+2,$$

cas particulier de la relation

$$(2B+1)^p=2p+(2-2^p)B_p;$$

et en observant que $B_p=0$, pour p impair, excepté B_1, qui est $\frac{1}{2}$. Cela étant, la comparaison avec la *formule de Newton* montre qu'on peut poser, simultanément,

$$c_p=\frac{(-1)^p}{1.2.3\ldots(2p+1)},\quad s_p=-\frac{2^{2p-1}B_{2p}}{1.2.3\ldots2p}.$$

Lorsque n augmente indéfiniment, aux racines de l'équation

$$z^n+\frac{z^{n-1}}{1.2.3}+\frac{z^{n-2}}{1.2.3.4.5}+\ldots+\frac{1}{1.2.3\ldots(2n+1)}=0$$

il faut substituer les racines de

$$\sqrt{z}\left(e^{\frac{1}{\sqrt{z}}}-e^{-\frac{1}{\sqrt{z}}}\right)=0,$$

c'est-à-dire

$$-\frac{\pi^2}{1},\ -\frac{\pi^2}{4},\ -\frac{\pi^2}{9},\ -\frac{\pi^2}{16},\ \ldots.$$

Or on voit directement que

$$s_p=(-1)^p\pi^{2p}\left(1+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{9^p}+\frac{1}{16^p}+\ldots\right).$$

On obtient ainsi l'importante formule

$$1 + \frac{1}{2^{2p}} + \frac{1}{3^{2p}} + \frac{1}{4^{2p}} + \ldots = (-1)^{p+1} \frac{2^{2p-1} B_{2p}}{1.2.3\ldots 2p} \pi^{2p},$$

qu'on démontre ordinairement, soit dans l'ancienne, soit dans la nouvelle théorie des *nombres de Bernoulli*, au moyen d'intégrales définies, tandis que nous n'avons eu besoin que de considérations *absolument élémentaires*. Actuellement, nous cherchons à établir, sur ces bases élémentaires, une méthode générale, pour la recherche des sommes analogues à celle qui vient d'être déterminée.

17. Enfin, montrons comment le calcul isobarique peut être utile dans l'étude des *séries récurrentes*. Soit $u_1, u_2, u_3, \ldots$ une telle série, *définie* par la relation

$$(13) \qquad u_n = A_1 u_{n-1} + A_2 u_{n-2} + \ldots + A_n u_0.$$

En prenant $u_0 = 1$, tous les termes sont déterminés, et l'on trouve, de proche en proche,

$$u_1 = A_1, \quad u_2 = A_1^2 + A_2, \quad u_3 = A_1^3 + 2 A_1 A_2 + A_3, \quad \ldots,$$

en général

$$(14) \qquad u_p = \sum_{m=1}^{m=p} \overset{m}{\underset{p}{\mathrm{S}}} (A_x).$$

Inversement,

$$A_p = \sum_{m=1}^{m=p} \left[(-1)^{m+1} \overset{m}{\underset{p}{\mathrm{S}}} (u_x) \right].$$

Par la comparaison de cette formule avec (12), on voit qu'on peut poser, simultanément,

$$u_p = \frac{1}{1.2.3\ldots 2p}, \quad A_p = -\frac{E_{2p}}{1.2.3\ldots 2p}.$$

Cela tient à ce que l'égalité de définition (11) peut être

mise sous la forme (13). Même observation pour les *nombres de Bernoulli*. Au moyen de (14) on peut donc *inverser* les relations (9) et (12). Par exemple, on obtient

$$\frac{1}{1.2.3\ldots 2p} = -\sum_{m=1}^{m=p} \mathop{\mathrm{S}}_{p}^{m}\left(\frac{\mathrm{E}_{2x}}{1.2.3\ldots 2x}\right).$$

18. On a des cas particuliers remarquables, lorsque

$$\mathrm{A}_1 = \mathrm{A}_2 = \ldots = \mathrm{A}_k = 1, \quad \mathrm{A}_{k+1} = \mathrm{A}_{k+2} = \ldots = 0.$$

D'après (14), u_p représente alors le *nombre des décompositions de p en parties entières et positives, non supérieures à k*. Pour $k = 2$, on obtient la *série de Fibonacci*

$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ \ldots,$$

dont le $p^{\text{ième}}$ terme représente donc le *nombre des décompositions de p en parties égales à 1 ou à 2*. Ainsi l'on a $4 = 2+2 = 1+1+2 = 1+2+1 = 2+1+1 = 1+1+1+1$. Le nombre de ces décompositions est $u_4 = 5$.

19. Dans certaines questions, qui sont en rapport plus direct avec l'algorithme étudié par M. d'Ocagne, il est préférable de considérer un autre algorithme $\sigma_p^m f(x)$, pour lequel on doit prendre toutes les solutions entières, *non négatives*, de l'équation

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = p.$$

En sous-entendant l'indice p, on trouve aisément les relations symboliques

$$1 + \sigma^m = (1 + \mathrm{S})^m, \quad 1 + (-\mathrm{S})^m = (1 - \sigma)^m.$$

On voit sans peine que le coefficient de z^p, dans

$$(1 + \mathrm{A}_1 z + \mathrm{A}_2 z^2 + \mathrm{A}_3 z^3 + \ldots)^m,$$

est $\sigma_p^m(\mathrm{A}_x)$. Par exemple, si $\mathrm{A}_p = 1$, $\sigma_p^m(1)$ représente

le nombre des solutions entières, non négatives, de l'équation $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = p$, de sorte que

$$\sigma_p^m(1) = C_{m+p-1,p};$$

par suite,

$$\begin{aligned}(1 + z - z^2 + z^3 + \ldots)^m \\ = 1 + C_{m,1} z + C_{m+1,2} z^2 + C_{m+2,3} z + \ldots.\end{aligned}$$

De même, la comparaison des développements de e^z, e^{mz} donne la forme connue

$$\frac{m^p}{1.2.3\ldots p} = \sigma_p^m\left(\frac{1}{1.2.3\ldots x}\right).$$

Ces résultats sont évidents; mais on remarquera que l'algorithme σ en facilite singulièrement la recherche. Il peut, d'ailleurs, dans certains cas, conduire à des conséquences plus importantes : nous l'appliquerons aux séries elliptiques, en relation avec l'analyse indéterminée du second degré.

20. Voici quelques autres formules, dont le lecteur trouvera facilement la démonstration :

a. La somme des produits p à p des n premiers nombres entiers est donnée, au moyen de l'algorithme σ, par la relation

$$S_{n,p} = (n+1)n\ldots(n-p+2)\sigma_p^{n-p+1}\left(\frac{1}{x+1}\right).$$

b. Les nombres de Bernoulli, *pris de quatre en quatre*, satisfont à la relation

$$-\frac{p}{2} = C_{4p+2,4} B_4 - C_{4p+2,8} 4 B_8 + C_{4p+2,12} 4^2 B_{12} - \ldots.$$

c. Les mêmes nombres sont donnés par la formule isobarique

$$\begin{aligned}B_{4p} = 1.2.3\ldots4p \frac{(-1)^{p+1} p}{2^{2p-1}} \\ \times \sum_{m=1}^{m=p}\left\{\frac{(-2)^m}{m} \mathop{\mathrm{S}}_p^m\left[\frac{1}{1.2.3\ldots(4x+2)}\right]\right\}.\end{aligned}$$

d. Les nombres de Bernoulli, *pris de huit en huit,* satisfont à la relation

$$-\frac{p}{2}u_{p+1} = C_{8p+4,8}B_8u_p - C_{8p+4,16}B_{16}4u_{p-1} + C_{8p+4,24}B_{24}4^2u_{p-2} - \ldots,$$

où les nombres u sont donnés par la loi de récurrence

$$u_n = 34u_{n-1} - u_{n-2},$$

avec les conditions initiales $u_1 = 1$, $u_2 = 33$. On trouve, de proche en proche,

$$u_3 = 1121,\quad u_4 = 38113,\quad u_5 = 1294721,\quad u_6 = 42725793,\quad \ldots.$$

e. Les nombres de Bernoulli, dont l'indice est divisible par 8, sont donnés par la formule

$$B_{8p} = 1.2.3\ldots8p\,\frac{(-1)^{p+1}p}{2^{2p-1}} \times \sum_{m=1}^{m=p}\left\{\frac{(-24)^m}{m}\mathop{\mathrm{S}}_{p}^{m}\left[\frac{u_{x+1}}{1.2.3\ldots(8x+4)}\right]\right\}.$$

Proposons-nous, par exemple, de calculer B_{16}. Nous obtenons

$$B_{16} = \frac{1.2\ldots16}{4}\left[24\,\frac{1121}{1.2\ldots20} - \frac{24^2}{2}\,\frac{33^2}{(1.2\ldots12)^2}\right].$$

Les simplifications, faciles et nombreuses, amènent immédiatement le résultat

$$B_{16} = \frac{59}{3.17.20} - \frac{11.13}{20} = -\frac{3617}{510}.$$

21. Dans un autre article, nous montrerons les liaisons de l'algorithme isobarique avec la fonction de Wronski, et nous en étendrons la signification, en supprimant la condition que les quantités x, dont la somme est p, soient entières, et en supposant p quelconque. En outre, nous généraliserons l'idée d'algorithme isobarique

en remplaçant la condition $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = p$ par une autre condition quelconque.

CORRESPONDANCE.

La formule (47) donnée par M. Picquet dans son Mémoire *Sur les équations différentielles linéaires à coefficients constants* (*Journal de l'École Polytechnique*, LIIIe Cahier, p. 134, paru en septembre 1883) résulte immédiatement des formules (5) et avant-dernière de ma Note *Sur un algorithme algébrique* (*Nouv. Annales*, 3e série, t. II, p. 224 et 226). D'OCAGNE.

Je suis complètement étranger à la rédaction et à la publication de l'Ouvrage intitulé : *Calcolo differenziale e principii di Calcolo integrale*, édité à Turin par les frères Bocca, libraires. Cet Ouvrage est dû exclusivement à M. le Dr G. Peano.

ANGELO GENOCCHI.

Nous devons mentionner : M. E. Barisien, comme ayant résolu la question 1488; M. Juhel-Rénoy, comme ayant résolu la question 1494; M. Louis M., comme ayant résolu la question 1495; M. E. Barisien, comme ayant résolu la question 1496; MM. Plamenewski, E. Barisien, Geneix-Martin et F. Pisani, comme ayant résolu la question 1497; MM. E. Barisien et F. Pisani, comme ayant résolu la question 1499; et MM. Plamenewski, Rénoy, de Strékalof, E. Barisien et F. Pisani, comme ayant résolu la question 1501.

M. E. Barisien nous a adressé une excellente solution analytique de la question proposée pour l'admission à l'École Polytechnique en 1884, où il considère aussi les cercles exinscrits. Il n'avait pas connaissance, au moment où sa lettre nous est parvenue, de la solution géométrique publiée en octobre dernier.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

Cours de Géométrie descriptive, Ier Volume, à l'usage des élèves de la classe de Mathématiques élémentaires, des élèves des Écoles supérieures municipales, des candidats au baccalauréat ès sciences et au diplôme d'études; par M. *E. Jurisch*, agrégé de l'Université, professeur aux Écoles supérieures municipales Colbert et J.-B. Say. Paris, Ch. Delagrave; 1880. In-8, avec figures dans le texte. Prix : 4fr.

Cours de Géométrie descriptive, IIe Volume, à l'usage des élèves de la classe de Mathématiques spéciales et des candidats à l'École de Saint-Cyr et à l'École centrale des Arts et Manufactures, répondant aux nouveaux programmes; par M. *E. Jurisch*, agrégé de l'Université, professeur de Mathématiques spéciales à l'École Colbert. Paris, Ch. Delagrave; 1882. In-8, avec figures et planches dans le texte. Prix : 8fr.

Calcolo differenziale e principii di Calcolo integrale, dal *Angelo Genocchi*, pubblicato con aggiunte dal Dr *Giuseppe Peano*. In-8. Torino, fratelli Bocca; 1884.

TIRAGES A PART.

Sulle forze impulsive che hanno la medesima azione sopra uno stesso punto di un sistema rigido; Nota dell' ingegnere Dott. Udalrigo Masoni. Extrait des *Rendiconti della R. Accademia delle Scienze fis. e mat. di Napoli*. 7e fascicule; juillet 1884.

Sulle derivate di ordine qualunque della funzione potenziale, quando l'attrazione e proporzionale all'

inverso della n^{ma} potenza della distanza; Nota dell' ingegnere Dott. Udalrigo Masoni. Extrait des *Rendiconti della R. Accademia delle Scienze fis. e mat. di Napoli.* 7ᵉ fascicule; juillet 1884.

Relazioni tra le radici di alcune equazioni fondamentali determinanti; Nota di P. Tardy. Extrait des *Atti delle R. Accademia delle Scienze di Torino,* vol. XIX, adunanza del 25 maggio 1884.

Sur la théorie des sons résultants; par le P. J. Delsaulx. Extrait des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles,* 8ᵉ année; 1884.

Mémoire sur le tétraèdre; par M. J. Neuberg. Extrait du t. XXXVII des *Mémoires couronnés et autres Mémoires,* publiés par l'Académie de Belgique; 1884.

Abaissement des limites fournies par la règle des signes de Descartes; par M. Désiré André. Extrait des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences;* janvier 1884.

Intorno ad una lettera di Carlo Federico Gauss al Dr Enrico Guglielmo Mattia Olbers. Memoria di B. Boncompagni. Extrait des *Atti dell'Accademia pontificia de' Nuovi Lincei,* t. XXXVI; sessione VIIª del 20 maggio 1883.

ERRATA.

Page 69, dans la note au bas de la page, *supprimez* mais avec une démonstration légèrement erronée.

Page 390, ligne 7 en remontant, *entre* osculateurs *et* imaginaires, *intercalez* dont deux.

Page 390, ligne 8 en remontant, *au lieu de* les, *lisez* deux.

Page 433, ligne 5, *au lieu de* $S_{n-p+1,p}$, *lisez* $S_{n+p-1,p}$.

Page 434, ligne 7 en remontant, *au lieu de* $2^{p+1}-(p+1)$, *lisez* $2^{p+1}-1$.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE.

(TOME III, 3e SÉRIE.)

Algèbre.

Trigonométrie.

Géométrie élémentaire.

Géométrie supérieure.

Géométrie à deux dimensions.

Géométrie à trois dimensions.

Pages.

Calcul différentiel et intégral.

Mécanique et Astronomie.

Mélanges.

Questions proposées.

Questions résolues.

TABLE DES NOMS PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

(TOME III, 3e SÉRIE.)

9170 Paris — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

